RISTRETTO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA

DEL PROFESSORE PRIMARIO

GAETANO ALFARO





NAPOLI 1814.

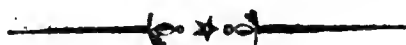
Nella Stamperia dell' Istituto Politecnico Militare

Diretta da Ludovico Sangiacomo.



Con permesso.

DISCORSO PRELIMINARE.



Il disegno, che è quel mezzo, o sia linguaggio necessario nella società al concepimento, ed esecuzione dei progetti, non solo per chi li deve immaginare, e dirigere, ma benanche per chi deve eseguirli; ad onta dell'uso fattone per molti secoli, essendo rimasto imperfetto, perchè non esprimeva esattamente le idee, dalla immaginazione concepite; seguiva, che gli oggetti proposti nel disegno, ottenendosi nella pratica sensibilmente diverse da quei, che realmente dovevano essere, conveniva in seguito, per rimediare agli errori commessi, accomodarli ed aggiustarli a tentone. Or siccome tale operazione apportava notabile svantaggio di tempo, travaglio, e dispendio; così, dall'epoca, nella quale le scienze cominciarono a pervenire quasi nello stato di loro perfezione, fu impegno degli amatori delle scienze, applicarsi alla rettificazione del disegno. Non riuscirono però vani gli sforzi, e tentativi intrapresi,

ma ebbero da non molti anni addietro il più felice successo, che immaginar si potesse, mediante l'invenzione di una scienza, chiamata al presente *Geometria descrittiva*. Or perchè questa viene trattata con metodo matematico; perciò ha meritato il luogo tra le più sublimi scienze, che sono dirette alla ricerca delle verità, applicate ad oggetti suscettibili della maggior evidenza, idonee ad esercitare le facoltà intellettuali, ed atte a contribuire alla perfezione della specie umana.

Affinchè la Geometria descrittiva fusse proporzionata al perfezionamento del disegno, e quindi delle arti, e scienze loro analoghe; conviene, che esponga quei metodi grafici, coi quali si possa soddisfare a tutte le diverse operazioni, e costruzioni da eseguirsi nella pratica: quindi deve contenere 1. Le diverse nature generali delle linee, e superficie. 2. La generazione di queste ultime. 3. Il modo come rappresentare in disegno il punto, le linee, e le superficie. 4. Le soluzioni dei Problemi di posizione, spettanti alle linee, alle superficie, ed agli angoli. 5. La maniera come determinare non solo la posizione di un piano, o di una superficie curva, tangente ad una o

più superficie curve, e distinguere i casi di solubilità, o insolubilità; ma benanche quella nella quale un piano, o una superficie curva abbia la posizione normale ad un' altra superficie curva. 6. I metodi come trovare l' incontro comune di due superficie curve. 7. Finalmente mostrare la maniera di appianare le superficie sviluppabili. Noi però, a causa del breve tempo destinato alla spiegazione di questa scienza, essendo stati costretti ristringere il corso sopra cennato; abbiamo scelto ciò, che è più interessante, affine d' istruire i Giovani principianti talmente, che si possino trovare nelle circostanze di ben comprendere qualunque altro trattato più esteso, che sopra la stessa materia si potrà loro presentare.

Intanto per far conoscere l' importanza, ed i grandi vantaggi, che risultano dalla presente scienza, accenneremo qui appresso qualche cosa, ma di passaggio, circa la sua applicazione.

Qualunque corpo, dopo essersi rappresentato in disegno, col conveniente numero di linee, affine di farlo viemaggiormente risaltare, o sia di poter ingannare la visione oculare con quella naturale illusione, mediante la quale nel mi-

rare il disegno, sembri guardarsi il vero e reale corpo; è necessario, dopo aver fissata una determinata direzione dei raggi di luce, ombreggiare il detto disegno, col determinare non solo le impressioni delle ombre, (le quali si formano sopra gli altri circostanti corpi) e le linee, che dividono la parte illuminata de la superficie del dato corpo dalla rimanente non schiarita, o sia non incontrata dai raggi della luce (in modo che si trovino in quei siti, nei quali devono esistere, se il vero corpo fusse realmente illuminato dai dati raggi di luce) ma ben anche con dare alle tinte quella gradazione al naturale corrispondente. Or per trovare quelche abbiamo detto, bisognando menare superficie tra loro tangenti, e disegnare gl' incontri di altri tra loro seganti; siccome tali operazioni si specificano nella Geometria descrittiva; così ne risulta, che questa scienza è necessaria per l'ombreggiamento dei disegni.

Per esprimere, o sia tracciare, in un foglio di carta la Prospettiva di uno o più corpi in quella maniera, che accade in Natura, dovendo noi far uso delle superficie tra loro tangenti, e seganti, si vede chiaro, che la presente scien-

za deve ben anche adoprarsi in quest' altra specie di disegno.

Non meno interessante è la Geometria descrittiva, per la formazione dei disegni appartenenti al taglio delle pietre, e del legname, esprimendo i primi le configurazioni da darsi ad ogni pietra componente una determinata *Volta*, ed i secondi per le combinazioni, e forme dei varj pezzi di legname necessarj alle costruzioni dei tettoj, ponti, macchine diverse, ed in particolare dei legni da guerra ec.; perchè per l' esattezza dei detti disegni, dai quali l' esecuzione pratica deve ricevere norma, e direzione, bisogna far uso, tra le altre cose, delle superficie tangenti, normali, e seganti.

Per defilamento poi delle fortificazioni è maraviglioso l' uso della presente Scienza, per causa dei piani tangenti, e superficie seganti, che si devono adoprare.

Lo stesso deve dirsi per le costruzioni occorrenti nella Gnomonica, Astronomia, Geografia ec.

Finalmente per non dilungarci di vantaggio, dovendosi adoprare lo spianamento delle superficie curve sviluppa-

bili, e l'incontro delle superficie, per poter eseguire nelle Arti, come in quelle dei Sarti, Calzolaj, Lavoratori di ferro bianco ec. le convenienti operazioni in una maniera facile ed esatta; si vede ad evidenza, che le Arti devono ancora ricevere norma, e direzione dai risultati della Geometria descrittiva.

GEOMETRIA

DESCRITTIVA.



1. L' oggetto primario della Geometria descrittiva è il metodo di geometricamente disegnare, rappresentare, o più comunemente projettare in una superficie piana i diversi corpi, che nello spazio hanno, o devono avere determinate forme, e posizioni. Dunque

La Geometria descrittiva è la scienza del disegno geometrico.

L' oggetto secondario poi abbraccia, non solo le regole come dalle projezioni ricavare le forme, e posizioni dei corpi, ai quali appartengono, ma benanche le altre per costruirli.

Quanto a questo secondo oggetto appartiene, viene chiamato *Stereotomia*, la quale possiamo così definirla

La Stereotomia è l'applicazione della geometria descrittiva alle arti, ed alle scienze.

Per ora esporremo solamente la geometria descrittiva.

2. Intanto è da notarsi, che la configurazione di un corpo venendo determinata dalla superficie, che lo circonda, è manifesto, che per essere rappresentato un corpo, basta projettare la sua superficie. Inoltre essendo le superficie limitate, ed i suoi limiti venendo espressi da linee, segue, che per rappresentare una superficie, bisogna sapere projettare le linee. Finalmente le linee essendo anche esse limitate, ed i suoi termini venendo dinotati da punti; è necessario, per rap-

presentare le linee, saper projettare i punti. Da quel che veniamo di dire, possiamo conchiudere, che

Per poter esprimere in disegno un corpo, conviene saper projettare i punti, le linee, e le superficie

CAPO I.

Delle diverse specie di linee, e superficie.

3. Prima di entrare nella specificazione delle projezioni, conviene conoscere le diverse specie di linee, e superficie, che siamo costretti maneggiare nella presente scienza.

Dalla planometria, e stereometria abbiamo acquistato soltanto le idee della linea retta, e curva, la quale si trova tracciata in un piano, questa pel detto motivo vien chiamata *curva piana*, o a *semplice curvatura*.

Oltre la detta linea, ve n'è un altra chiamata a *doppia curvatura*, ed è appunto quella, della quale gl'elementi non si trovano tutti in un piano. Per acquistare una idea pratica di questa curva, è sufficiente, avvolgere un filo di ferro in quella maniera, che si vuole, ed indi buttarlo su di una superficie piana; se tutta la curva combacia col piano, sarà a semplice curvatura, altrimenti dirassi a doppia curvatura.

4. Una superficie può essere benanche di tre specie; cioè *piana*; a *semplice curvatura*; *ed a doppia curvatura*. Non vi è bisogno parlare della prima, perchè bastante cognizione se n'è data nella planometria; resta soltanto esaminare brevemente le generali nature delle due ultime.

Siccome però (*G. S.* 77) una superficie curva si può considerare come un composto di elementi di primo, o secondo ordine, che tra loro si succedono, ed i due contigui s'incontrano sotto un angolo ottusissimo; così, affinchè l'esame, che faremo riesca chiaro, cominceremo a considerare la prima formazione, cioè, che la superficie sia composta dagli elementi di primo ordine.

5. Questi elementi potendo essere tutti piani o curvi (non terremo conto del caso, nel quale sono porzione curvi, e porzione piani, perchè ciò che diremo per ciascuna delle due ipotesi, si applicherà a questa terza), nel primo caso la sezione di due elementi contigui qualunque essendo linea retta. Segue, che se si suppone restare immobile il secondo elemento; ed il primo muovere intorno la sua comune sezione, essendovi tra le infinite posizioni, che può avere, una sola, la quale si ritrova nella stessa direzione, o piano, col secondo elemento, in questo stato li due primi elementi col descritto moto formeranno un sol piano. Similmente facendo muovere intorno il terzo elemento i primi due, che di già formano un piano, giungeranno benanche ad una posizione, nella quale tutti e tre si trovano in un piano. Lo stesso eseguendo per ciascuno dei rimanenti elementi, si troveranno alla fine formare tutti una sola superficie piana, la quale paragonata colla superficie curva, perchè il numero degli elementi, ed il contorno di ciascuno di questi non si sono alterati nel moto, perciò le due aje sono tra loro eguali, non meno che li due contorni. Segue da ciò, che la differenza, la quale passa tra le due superficie, non è altra, che nella superficie curva due elementi contigui qualunque formano un angolo il massimo ottuso possibile,

e perciò sempre minore di due retti, e nell'altra superficie, cioè nella piana, il detto angolo è sempre eguale a due retti.

6. La superficie appianata chiamasi *sviluppata della superficie curva*, e l'operazione da eseguirsi, si dice, *sviluppare la superficie curva.*

7. Possiamo per ciò conchiudere, che

La superficie curva, della quale gli elementi di primo ordine sono piani, gode la proprietà di essere sviluppabile, o sia che si può ridurre a superficie piana, ed in questo stato l'aja, ed il contorno sono rispettivamente eguale a quelli della configurazione curva.

8. Queste superficie per avere una sola curvatura, dipendente dalla inclinazione secondo la quale sono posti li due elementi contigui di primo ordine, si nominano appunto *superficie curve a semplice curvatura.*

9. Nel secondo caso, nel quale gli elementi di primo ordine sono superficie curve, potendosi li due contigui incontrare secondo una linea curva, o pure una retta, dipendente dalla natura della superficie curva, è da se manifesto, che essendo detto incontro una linea curva; siccome non può un elemento girare intorno il contiguo, ed essendo linea retta, quantunque il moto si può eseguire, giammai li due elementi, per essere curvi, giungono a combaciare con una superficie piana, così ne deriva, che

Una superficie curva non si può sviluppare, qualora gl' elementi di primo ordine, dei quali si vuole far uso, sono superficie curve.

10. Queste superficie avendo due curvature secondo il senso delle due loro dimensioni, una cioè, che appartiene a ciascun elemento curvo, l'altra spettante alla inclinazione dei due contigui

elementi, perciò vengono chiamate *superficie curve a doppia curvatura.*

11. Volendo poi considerare, che una superficie curva sia un composto di elementi di secondo ordine: questi potendosi stimare come superficie piane, ed i loro incontri essendo linee rette; siccome intorno a queste possono sempre girare gli elementi, e mettersi in piano; così sembra, che, mediante gli elementi di secondo ordine, possiamo conchiudere, esser qualunque superficie curva sempre sviluppabile.

12. Per dilucidare pienamente questa conseguenza, è da sapersi, che, quanto si è detto nel precedente paragrafo, ha sempre luogo, eseguendo i movimenti, e lo sviluppo nella sola immaginazione; qualora poi si voglia effettivamente, o sia graficamente operare, accade tutto l'opposto. Infatti per disegnare gl' elementi piani di primo ordine dovendosi le lunghezze delle due dimensioni di ogn' uno determinare col compasso; siccome una di esse è finita, e l' altra infinitamente piccola; così la prima misurandosi esattamente, e la seconda dovendosi prendere di lunghezza la più piccola che si può, ma finita, perchè in pratica le quantità infinitamente piccole non si possono esprimere. Segue, che lo sviluppo quantunque non riesce perfetto, nulla dimeno però la differenza essendo insensibile, quindi trascurabile, si potrà far uso della superficie sviluppata senza timore di errare. Dippiù volendosi alla superficie sviluppata dare la configurazione curva (lo che nelle arti si deve sempre eseguire); siccome dopo lo sviluppo gli elementi sono talmente uniti, che tra loro non vi resta intervallo di sorte alcuna; così questa circostanza producendo facilitazione nel piegamento delle parti, si potrà con agevolezza, e colla

massima esattezza ottenere il risultato della operazione opposta allo sviluppo.

Il contrario accade volendo, nello sviluppare la superficie, della quale gl'elementi di primo ordine sono curvi, far uso degli elementi di secondo ordine. Perchè nel disegnare questi, oltre di commettersi un doppio errore, per essere tutt'e due le dimensioni infinitamente piccole, vi è ben anche la circostanza, che tutti gl'elementi dopo essere appianati, non restando ciascuno unito intorno intorno con gl'altri contigui, la fatiga sarebbe grandissima, e quasi impossibile riuscirebbe la formazione dello sviluppo della superficie, per l'immensa quantita degl'elementi da disegnarsi. Finalmente supposto superata questa difficoltà, e che si voglia fare l'operazione contraria, è chiaro, che nel piegare gl'elementi per configurarli a superficie curva, non solo dovendosi eseguire un immenso numero di unioni, ma ben anche la superficie risultante non essendo curva, ma quella di un poliedro, perciò possiamo definitivamente conchiudere, che

Le superficie curve sono tutte in astratto sviluppabili; quelle poi delle quali gli elementi di primo ordine sono superficie piane, possono graficamente svilupparsi, e si chiamano a semplice curvature; le altre poi, che hanno gli elementi di primo ordine curvi, non sono graficamente sviluppabili, e si denominano superficie a doppia curvatura.

13. Prima di terminare questo capitolo è necessario esaminare, quali sono nominativamente le superficie a semplice, ed a doppia curvatura.

Gl'elementi di primo ordine delle superficie a semplice curvatura essendo piani, e gl'incontri di uno di essi con i due contigui linee rette, che

si trovano nello stesso piano, il quale è il detto elemento di mezzo; siccome due rette che si trovano in un piano possono avere tra loro due posizioni, cioè di essere paralelle, o concorrenti; così la figura di ogni elemento potendo essere triangolare, o paralellogramma. Perciò

Le superficie a semplice curvatura sono di due sole specie, cioè coniche, e cilindriche, tutte le altre possibili ed immaginabili sono a doppia curvatura.

14. Si noti, che la base di una superficie conica, e cilindrica può essere una curva qualunque, a semplice o doppia curvatura, e l'essere circolare, come si è considerata nella Stereometria, è una ipotesi particolarissima, tra le infinite che possono darsi.

15. Si è stimato dividere in tre classi le superficie a doppia curvatura. Nella prima vengono incluse quelle, le quali hanno per generatrice una linea retta, come le superficie curve dei conicunei, delle scale a lumaca ec.; le quali per distinzione vengono chiamate *superficie Storte*. Nella seconda sono annoverate quelle dette di *rivoluzione*, ogn' una delle quali ha la generatrice curva, che si muove attorno una retta come asse; ed il movimento di esso chiamasi di *rivoluzione regolare*, qualora la generatrice nel muoversi un' angolo o una posizione costante coll' asse, o sia che ogni punto della generatrice descrive una circonferenza di cerchio, l' asse non solo passa pel centro, ma è ben anche perpendicolare al piano del cerchio: quando poi il detto angolo varia nel moto della generatrice; o pure alla curva, descritta da un punto della generatrice, manca una o più delle tre accennate condizioni, il moto chiamasi *irregolare*. Una delle superficie di rivoluzione regolare è la

sferica. Alla terza finalmente appartengono tutte le rimanenti, delle quali le generatrici sono curve, ed il moto non è di rivoluzione; queste vengono particolarmente nominate *superficie a doppia curvatura*.

Si noti, che quantunque le superficie coniche, e cilindriche sono anche di rivoluzione; nulladimeno però per essere la generatrice linea retta, e per appartenere alla classe di quelle a semplice curvatura, non s' includono nelle dette superficie di rivoluzione. Similmente alcune superficie Storte potendo essere benanche di rivoluzione, per la stessa ragione detta qui avanti, non s' includono in queste seconde.

CAPO II.

Metodo di projettare.

16. Essendosi detto al paragrafo 2; che in questa scienza considerar si devono soltanto i punti, le linee, e le superficie; perciò nel presente capitolo esporremo la maniera di eseguire le loro projezioni.

PROJEZIONE DI UN PUNTO.

17. Per projettare un punto, dovendo esser fissata la sua posizione nello spazio, ragion vuole, che ci applichiamo a ritrovare prima di tutto, ciò che bisogna per detta determinazione.

Lo spazio essendo infinito per ogni verso, ed in esso un punto da immaginarsi potendosi trovare in ciascuno dei suoi siti infiniti di numero. Segue, che la posizione del punto sarà in-

certa, se non si determina in rapporto ad altri suoi siti, cioè punti, li quali si possono fissare arbitrariamente. Quindi tutto l'esame non si riduce ad altro, che ritrovare quanti punti sono necessarj darsi, acciò quello, del quale trattiamo, resti determinato di posizione.

18. Supponiamo che il proposto punto, che chiamiamo *D*, sia lontano da un altro *B* cognito nello spazio, per una data distanza; è chiaro, che in tale ipotesi, immaginando essere il punto *B* il centro della sfera, della quale il raggio è la data distanza; siccome il punto *D* si può trovare in ciascuno di quelli di numero infinito, determinabili nella superficie sferica; così la sua posizione sarà incerta, in conseguenza la determinazione di un solo punto *B* non è sufficiente. Sia in secondo luogo il punto *D* lontano per determinate distanze da due punti cogniti *B*, *C*. Coll'aumento di un altro punto, essi tutti, formando il numero di tre, se si uniscono con rette, avremo un triangolo, il quale facendosi muovere intorno il lato, che unisce i due punti *B*, *C*, con un intero giro, il vertice, che è il punto *D*, descrivendo una circonferenza di cerchio, e potendosi ritrovare in ciascun punto di questa; perciò la sua posizione neppure sarà determinata. Finalmente se i punti cogniti sono tre *B*, *C*, *A*, dai quali il punto *D* sia lontano per determinate distanze, essendo manifesto, che coll'aumento del punto *A* si ottiene un'altra distanza, la quale viene a fissare il moto di rivoluzione del triangolo, che in questo caso può avere soltanto due posizioni, una superiore, l'altra inferiore al piano dei tre punti *B*, *C*, *A*. Quindi possiamo conchiudere, che Fig. 1

La posizione di un punto nello spazio resta determinata, qualora sono date le distanze di esso a tre punti cogniti.

19. Tutti i punti di questa ultima ipotesi essendo quattro C, B, D, A, se due a due si uniscono con rette, queste giungendo al numero di sei, ci somministrano quattro triangoli, che formano una piramide triangolare, della quale i tre punti B, C, A, che sono i vertici degli angoli della base, esprimono i tre punti cogniti, ed il vertice D quello in questione; e siccome in qualunque piramide, abbassata dal vertice D sulla base la perpendicolare DE, e dal piede E sopra qualunque dei tre lati di essa, come BA, un'altra perpendicolare EF; il vertice D resta determinato dalle tre rette BF, FE, ED date di lunghezza e posizione; così

Fig. 1

La posizione di un punto nello spazio resta determinata da tre rette, date di lunghezze, e posizioni tali, che la prima è posta ad angolo retto colla seconda, e questa oltre di essere perpendicolare alla terza, il piano, che passa per esse due, è benanche perpendicolare a quello della prima e seconda.

20. Queste tre rette si chiamano *coordinate*, e non è necessario, che siano poste tra loro ad angolo retto, ma per sola facilitazione si è adottata tale posizione.

21. Inoltre se per gl'estremi B, F, E delle tre coordinate, e perpendicolarmente ad esse, si fanno passare li tre piani BG, BH, AI, siccome abbassando dal punto D sopra detti piani le perpendicolari DK, DL, DE, le quali oltre di dinotare le tre distanze del punto D ai tre piani, risultano ben anche eguali alle rispettive

coordinate, e disposte due a due ad angolo retto; così possiamo dire ancora, che

Un punto resta determinato nello spazio, allorchè sono date le sue distanze da tre piani tra loro non paralelli, li quali si chiamano piani coordinati, o di projezione.

22. Finalmente, se un solo dei tre piani, come *BG*, immaginiamo, che passi pel punto *D*: e sia espresso da *DFEL*, in questo caso non è necessario far uso di tutti e tre i piani, ma soltanto di due, cioè *AI*, *DF*, perchè le tre coordinate *BF*, *FE*, *ED* esistono in detti due piani; cioè *EF* cade nella loro comune sezione, *BF* nel piano *AI*, ed *ED* nell' altro *DF*.

Inoltre considerando essere *AI*, *BH* i due piani coordinati, se in uno di essi come *BH*, si tira dall' estremo *F* della *BF* a questa una perpendicolare *FL*, eguale alla distanza, che deve avere il punto *D* dal piano *AI*, o sia eguale alla coordinata *DE*, con tale costruzione la *DE* si sarà trasportata nel piano *BH*, e siccome nel piano *AI* si trova la coordinata *EF* perpendicolare a *BF*, ed eguale alla distanza del punto *D* al piano *BH*; così è manifesto, che dai punti *E*, *L* tirate le rispettive paralelle *ED*, *LD* alle *FL*, *FE*, ed il loro incontro dandoci benanche il punto *D*, di posizione determinata. Quindi

Un punto resta determinato di posizione nello spazio, mediante due piani, o pure tre coordinate.

Di questa verità che è la più facile, faremo uso nel corso di questa scienza.

23. Per comodo, e facilitazione uno dei due piani supporremo, che sia sempre orizzontale, in conseguenza il secondo risulterà verticale.

24. Un piano orizontale potendo avere infiniti piani verticali; perciò il secondo piano coordinato, cioè quello verticale può avere quella posizione che piacerà. Queste infinite posizioni del piano verticale, ci somministrano grande facilitazione nei problemi.

25. L'incontro dei due piani coordinati chiamasi per distinzione *comune sezione*.

26. Premesso quanto abbiamo detto circa la posizione del punto, è tempo parlare della sua projezione.

Fig. Siano BH, IA i due piani coordinati, AB la comune sezione, e D il punto esistente nello spazio. Se per D si fa passare una retta qualunque, la quale concorre col piano orizontale AI, il punto d'incontro è quello, che chiamasi *rappresentazione*, o più comunemente *projezione orizontale del dato punto*, se poi la stessa costruzione si esegue nell'altro piano, che è il verticale, la projezione si nominerà *verticale*. Or siccome due piani sono necessarii per la posizione del punto; così due sole projezioni bastano per rappresentarlo. La projezione orizontale è quella, che dai disegnatori si chiama, *Pianta* o *Piano*, e la projezione verticale *Profilo*, *Alzato*, o volgarmente *Spaccato*.

27. Potendo pel punto D passare infinite rette concorrenti col piano coordinato, ed essendovene tra esse una sola, che gli è perpendicolare; per facilità, ed esattezza nel projettare, faremo uso delle rette perpendicolari; a causa di tale condizione, le projezioni si nominano *ortografiche*, noi però per brevità di espressione tralasceremo di scrivere la detta parola, perchè sempre la sottointenderemo.

28. La facilità ed esattezza che arrecano nel-

le operazioni le rette perpendicolari sono pur troppo manifeste 1.° perchè l' angolo retto è il più cognito, ed unico, 2.° si può con facilità costruire geometricamente, senza esprimerlo in gradi, e senza dare il rapporto tra il seno, e coseno, e 3.° finalmente non esistendo in natura punti, e linee matematiche, segue, che l' incontro di due linee non essendo in pratica un punto, ma una superficie; siccome questa è la minima, qualora le due linee s' incontrano ad angolo retto; così per questi motivi addotti, si è stimato seguire il sistema ortografico.

29. Se il piano verticale si fa girare intorno la comune sezione, finchè diviene orizontale, in tale posizione formando un sol piano coll' altro di projezione orizontale; si viene ad ottenere ciò, che si è detto nel paragrafo primo. Intanto è da avvertirsi, che questo movimento, o abbassamento del piano verticale si fa eseguire ben anche a qualunque altro si sia piano.

30. Inoltre essendo *IA*, *BH* i due piani di projezione, posti nella loro naturale posizione, e *D* il punto nello spazio; Se si abbassano sopra i detti piani le due perpendicolari *DE*, *DL*, i due punti *E*, *L* saranno le projezioni del punto dato. Or le due perpendicolari *EF*, *LF* abbassate dalle projezioni sulla comune sezione *BA*, incontrandosi con questa in un sol punto *F*, segue, che nel moto del piano verticale, la *LF* mantenendosi sempre perpendicolare ad *AB*; giunto che sarà il piano *BH* nella posizione orizontale, le due *EF*, *LF* formeranno una sola retta perpendicolare ad *AB* (*G. P.*). Perciò

Le due projezioni di un punto (dopo essersi abbassato il piano verticale sull' altro ori-

zontale) unite con una retta, questa deve essere perperpendicolare alla comune sezione.

31. Da questa verità deriva la seguente, che *Se la retta congiungente due punti, uno esistente nel piano orizontale, l'altro nel verticale abbassato sull' orizontale, non è perpendicolare alla comune sezione. Li due punti non sono projezioni spettanti ad un sol punto nello spazio.*

32. Finalmente notar si deve, che prolungandosi il piano orizontale *IA* al di là della comone sezione: la porzione *IA* al di quà della *BA*, si chiama *piano orizontale positivo*, e l'altra al di là *piano orizontale negativo*. Similmente prolungato al disotto di *BA* il piano verticale, la parte *BH* situata sopra *BA* si nomina *piano verticale positivo*, la rimanente porzione al di sotto *piano verticale negativo*.

33. Il piano verticale, nell'abbassarsi sul piano orizontale, dovendo girare intorno la *BA*; siccome il moto può eseguirsi al di quà, ed al di là di *BA*; noi seguiremo sempre questo secondo, perchè il piano del disegno, nel quale si deve operare, essendo più sgombro di linee, che rappresentar devono i dati del problema, vi accade meno confusione.

34. Per causa del detto moto succede, che dopo l' abbassamento del piano verticale, la sua porzione negativa combacia col piano orizontale positivo, e l' altra positiva col piano orizontale negativo.

PROJEZIONE DI UNA LINEA.

35. Non potendosi projettare una linea, se la sua posizione nello spazio non è determinata; con-

viene perciò esaminare primieramente, ciò che bisogna per determinare la detta posizione. Per procedere con ordine, siccome la linea può essere curva, o retta, così cominceremo dalla prima.

Se della curva si fissa soltanto un punto, intorno questo potendo ricevere tante posizioni, quanti sono i raggi di una sfera; perciò la posizione della curva non sarà determinata. Di più determinando due punti, e potendo la curva avere un moto di rivoluzione intorno la retta congiungente, i due punti, e quindi tante posizioni quante sono quelle del raggio di un cerchio, neppure sarà determinata la posizione. Finalmente fissando tre suoi punti, li quali non siano in linea retta, mediante l'aggiunzione del terzo punto, venendo fissato il secondo moto, resterà determinata la posizione della proposta curva. Perciò

La posizione di una curva nello spazio resta determinata, qualora sono fissati tre suoi punti, che non sono in linea retta.

Si è detto che i tre punti da fissarsi nella curva non devono trovarsi in linea retta, affine d'impedire il secondo moto di rivoluzione, perchè altrimenti, questo esistendo sempre, non vi sarà determinazione di posizione.

36. In secondo luogo considerando la linea retta; siccome fissando un suo punto, può essa avere infinite posizioni; così colla determinazione di un secondo punto venendosi a distruggere il detto moto, perchè tutte le parti della retta sono nella stessa direzione. Perciò

La posizione di una retta nello spazio viene determinata da quelle di due suoi punti.

37. Premesso quanto abbiamo detto circa il punto, e supposto essere data nello spazio una curva: chiaramente si vede, che abbassando da

tutti li punti, che in essa si possono immaginare, delle perpendicolari sul piano, di projezione orizontale, ed unendo i loro piedi con una linea. Sarà questa *la projezione* orizontale della data nello spazio.

38. La detta costruzione eseguendosi nel piano verticale, otterremo *la projezione verticale della curva.*

39. Se per le perpendicolari abbassate sul piano orizontale si fa passare una superficie; ed un' altra per quelle sul piano verticale, essendo queste della specie delle cilindriche; perciò la curva data è l'incontro di due superficie cilindriche rette, e le basi ne sono le projezioni.

40. Si noti, che il numero dei punti, li quali si possono immaginare in una curva, essendo infinito, ed in pratica non potendosi avere tale numero. Perciò nell'eseguire le projezioni, si deve determinare quel numero maggiore possibile di punti, acciò la costruzione risulti più esatta.

41. Inoltre per una curva a doppia curvatura potendo sempre passare una superficie cilindrica; segue, che per esser questa sempre sviluppabile, si potrà la curva sudetta ridurre a semplice curvatura, ed essendo questa sempre graficamente rettificabile. Perciò

Qualunque curva a doppia curvatura è sempre graficamente rettificabile.

42. Per projettare ora la linea retta, siccome abbassando le perpendicolari da tutti gl' infiniti suoi punti, la superficie, che passa per esse, è piana; così la linea, la quale unisce i piedi di dette perpendicolari, esprimendo non solo la projezione della data retta, ma benanche l'incontro dei due piani; segue, che per esser questo

linea retta, la quale resta determinata da soli due punti. Perciò

La projezione di una linea retta, generalmente parlando, è anche linea retta, e si determina con unire i piedi di due sole perpendicolari, abbassate sul piano di projezione da due suoi punti.

43. Si è detto *generalmente parlando*, perchè non sempre accade, che la projezione di una retta è anche retta. Per spiegare ciò con chiarezza, è necessario esaminare i rapporti, che passano tra una linea data nello spazio, e la sua projezione. In primo luogo supponendo, che la linea data sia retta, questa con un piano potendo avere tre posizioni; la 1.ª di essergli parallela; la 2.ª perpendicolare; e la 3.ª obbliqua; segue, che nella prima posizione, abbassando da due suoi punti le perpendicolari sul piano di projezione, ed i loro piedi unendoli con una retta, la quale, come si è detto, è la projezione della data; siccome le due perpendicolari, la retta data, e la sua projezione formano un rettangolo. Perciò

La massima projezione di una retta, è un' altra ad essa eguale, e si ottiene, qualora quella nello spazio è paralella al piano di projezione.

Nella seconda posizione poi, le dette perpendicolari, abbassate dai due punti, confondendosi colla stessa retta, ed i loro piedi coincidendo in quello della retta data. Risulta, che

La minima projezione di una retta è rappresentata da un punto, e si ottiene quando la retta è perpendicolare al piano di projezione.

Fig. 1 Nella terza posizione essendo CE la projezione della retta obbliqua DC; ed il triangolo DEC rettangolo in E, segue, che

Una retta obbliqua sta alla sua projezione, come l'ipotenusa al corrispondente cateto del conveniente triangolo rettangolo; o pure, volendo fare uso delle linee trigonometriche, come il seno tutto al coseno dell'angolo d'inclinazione, che la retta data fa col piano di projezione.

44. Considerando ora, che la linea sia curva a semplice curvatura, e la posizione del suo piano essendo di tre maniere, cioè paralella, perpendicolare, ed obbliqua al piano di projezione. È manifesto, che in riguardo alla prima, dinotando la curva, e la sua projezione, le basi paralelle di una superficie cilindrica. Perciò

Di una curva a semplice curvatura si ottiene la massima projezione, la quale gli è perfettamente eguale, allorchè il piano della curva è paralello a quello di projezione.

Per la seconda posizione è evidente, che

La minima projezione di una curva a semplice curvatura si ottiene, qualora non solo il piano della curva è perpendicolare al piano di projezione, affinchè la projezione risulti linea retta, ma benanche la curva abbia tale posizione nel piano, il quale passa per essa, che il minimo lato, tra tutti quei degl'infiniti rettangoli ad essa curva circoscritti, sia posto paralellamente al piano di projezione, acciò la projezione rettilinea risulti della minima lunghezza.

Finalmente la terza posizione, essendo intermedia alle due già dette. Perciò

La projezione intermedia di una curva a semplice curvatura è sempre minore della massima, e maggiore della minima.

45. Conviene ora considerare la terza specie di linea; cioè la curva a doppia curvatura. Per quel che si è detto (§. 3.), tutti gl' elementi di detta curva non trovandosi in un piano, o sia a questo giammai potendo essere tutti paralelli. Perciò

Una curva a doppia curvatura non può avere una projezione, che gli sia eguale, ma esser deve sempre minore.

46. Da questa verità segue, che immaginando passare per la detta curva un numero infinito di superficie cilindriche; siccome le basi perpendicolari ai rispettivi lati dinotano le infinite projezioni della curva; così

Se tra il numero infinito delle basi perperdicolari ai rispettivi cilindri, circoscritti ad una curva a doppia curvatura, si trovano quelle due, delle quali una ha la massima, l'altra la minima lunghezza di tutte le rimanenti, e ciascuna di queste due basi si situa paralellamente, o pure ogn' uno dei corrispondenti cilindri perpendicolarmente al piano di projezione; si otterrà la massima, o minima projezione della data curva a doppia curvatura.

Abbiamo finora considerato una sola linea nello spazio; è necessario al presente supporre, che siano non solamente due, ma eziandio rette, per ritrovare le proprietà, che appartengono alle loro projezioni in un sol piano coordinato.

Queste due rette potendosi tra loro combinare in tre ipotesi, 1.ª che siano paralelle, 2.ª concorrenti, e 3.ª esistenti in piani diversi; parleremo perciò particolarmente di ogn' una di esse.

1. IPOTESI.

47. Le posizioni, che le due rette paralelle possono avere col piano di projezione, essendo tre; 1.ª di essergli perpendicolari, 2.ª paralelle, 3.ª obblique, è evidente nella prima posizione, che

Se due rette tra loro paralelle, sono perpendicolari al piano di projezione, le loro projezioni sono due punti.

48. Nella seconda posizione, il piano delle due rette se è perpendicolare a quello di projezione; è chiaro, che nell' incontro dei due piani cader devono le projezioni delle due rette; se poi è obbliquo; siccome nel projettare le due rette, il piano che passa per le perpendicolari, abbassate da due punti di una di esse rette su quello di projezione, è non solo diverso da quello, che passa per le due perpendicolari dell' altra retta, ma ben anche sono tra loro paralelli; così per la geometria solida, essendo, gl' incontri di due piani tra loro paralelli con un terzo, rette tra loro paralelle. Perciò

Se due rette nello spazio sono paralelle tra loro, ed al piano di projezione. Se il piano di esse è perpendicolare a quello di projezione, le projezioni delle due rette saranno espresse da una sola retta; se poi obbliquo, verranno dinotate da due rette distinte tra loro, e paralelle.

49. Alla terza posizione appartiene lo stesso che si è detto per la seconda.

2. IPOTESI.

51. Non vi è dubbio, che

Due rette, le quali sono nello spazio tra loro

concorrenti, non possono le loro projezioni esser nel tempo stesso espresse da due punti, ma al più una sola.

51. Ciò posto, il piano, che passa per le due rette, potendo essere 1.° paralello, 2.° perpendicolare, e 3.° obbliquo à quello di projezione; siccome, riguardo al primo, per ottenere le projezioni, bisogna far passare per le due rette due piani perpendicolari a quello di projezione; così a causa della concorrenza delle due rette, gl' incontri dei due piani col terzo di projezione essendo ancora due rette concorrenti. Perciò

Le projezioni di due rette tra loro concorrenti, ma paralelle al piano di projezione, sono rette tra loro concorrenti.

52. Circa il secondo possiamo dire, che

Le projezioni di due rette tra loro concorrenti, il piano delle quali è perpendicolare a quello di projezione, sono espresse da una sola retta.

53. Al terzo caso applicando ciò, che si è detto pel primo; possiamo conchiudere, che

Essendo il piano di due rette, concorrenti tra loro, obbliquo a quello di projezione; le projezioni delle due rette saranno rette tra loro concorrenti.

3. IPOTESI.

54. Prima di entrare nell' esame della presente ipotesi, è da premettersi, che se A, B sono due rette nello spazio tra loro paralelle, e per un punto di A si fa passare una retta C, la quale abbia quella direzione, che si vuole, e per un punto di B si conduce una paralella a C; siccome per la geometria solida, il piano, che passa

per A, e C, è paralello a quello per B, e D; così abbiamo, che

Se per una di due rette tra loro paralelle passa un piano, il quale abbia quella direzione, che si vuole, sempre per l'altra retta ve ne può passare un altro, non solo paralello al primo, ma eziandio qualunque piano, il quale passa per una delle due rette, è paralello all'altra, e per tutt' e due le rette non vi può passare se non un solo piano.

55. Ciò posto, supponiamo che AB, CD siano due rette, le quali si trovano in piani diversi. Se per un punto F della CD si conduce Fig. 2 la retta FH paralella ad AB, e pel punto E della AB la EG paralella a CD, sarà per la geometria solida il piano AEG paralello all' altro CFH, o pure alla retta CD. Inoltre pel punto E potendo passare infinite rette, se si conduce una qualunque EI, la quale non esista nel piano AEG, e pel punto F un' altra FK paralella ad EI; siccome il piano AEI è paralello ad HFK; così essendo con questo concorrente la CD, sarà pure tale, non solo con AEI, ma benanche con qualunque altro, che passa per AB, escluso il già detto AEG. Perciò

Per una di due rette, che sono in piani diversi, non può passare se non un solo piano paralello alla seconda, e tutti gl' altri gli saranno concorrenti; o pure se vogliamo esprimerci diversamente, possiamo dire, che per due rette, le quali si trovano in piani diversi, non possono passare se non due soli piani di determinata posizione, uno per ciascuna, tra loro paralelli, e tutti gl' altri devono essere sempre scambievolmente concorrenti.

56. Da questa verità segue, che

Se le due rette le quali si trovano in piani diversi, hanno tale posizione nello spazio, che li due piani paralelli, li quali passano per esse, sono perpendicolari a quello di projezione, le projezioni delle due rette sono rappresentate da due rette paralelle tra loro, o pure una da un punto, e l'altra da una retta, che non passa pel detto punto.

57. Avendo parlato delle projezioni di due rette in un sol piano, è molto giusto, dire qualche cosa, ma brevemente, circa quelle in tutti e due i piani di projezione. Cioè, che

Se il piano delle due rette, tra loro paralelle, o concorrenti, è perpendicolare ad uno, ed obbliquo all'altro piano di projezione. Nel primo le due projezioni possono essere espresse da due punti, o da una sola retta, e nel secondo da due tra loro paralelle o concorrenti.

58. *Se il piano, che passa per due rette fra loro paralelle, o concorrenti, è perpendicolare ai due di projezione, dovranno tutte le projezioni qualunque esse siano trovarsi in una sola direzione perpendicolare alla comune sezione.*

59. *Se il piano delle due rette è obbliquo ai due di projezione, in ciascuno di questi le projezioni saranno tra loro concorrenti, o paralelle, secondochè tali sono tra loro le rette nello spazio; colla circostanza però, che nel caso di concorrenza i due punti di concorso, uno cioè nel piano orizzontale, e l'altro nel piano verticale, uniti con una retta, questa risultar deve sempre perpendicolare alla comune sezione.*

60. *Finalmente se il piano delle due rette,*

tra loro paralelle o concorrenti, è paralello ad uno, e perpendicolare all' altro di projezione, in questo le projezioni saranno espresse da una sola retta, o da due punti, e nel primo da due rette paralelle o concorrenti.

61. Riguardo alle due rette esistenti nello spazio, e le quali si trovano in piani diversi; siccome per esse possono passare soltanto due piani tra loro paralelli; così

Se li due piani, che passar devono per due rette, esistenti in piani diversi, a motivo di ottenere le projezioni orizontali, sono tra loro concorrenti, e lo stesso accade in riguardo al piano verticale. Le projezioni in ciascun piano esser devono tra loro concorrenti, ed i due punti di concorso uniti con una retta, deve questa essere obbliqua alla comune sezione.

62. *Se i due piani, che passano per due rette esistenti in piani diversi, e che devono determinare le projezioni orizontali, sono quelli appunto tra loro paralelli, e gl' altri, che devono dare le projezioni verticali, sono tra loro concorrenti; saranno le projezioni orizontali dinotate da due rette tra loro paralelle, o pure da una retta, e da un punto e le projezioni verticali da due rette concorrenti.*

63. *Se le posizioni nello spazio di due rette, non esistenti nello stesso piano, sono tali, che i due piani paralelli sono nel tempo stesso perpendicolari ai due piani di projezione; le projezioni in ciascun piano saranno non solo tra loro paralelle, ma ben anche quelle di ciascuna retta si troveranno in una sola, perpendicolare alla comune sezione.*

64. Da quanto abbiamo detto, si ricavano la verità inverse, che ci devono servire per conosce-

re dalle projezioni le posizioni, che hanno due rette nello spazio, ci asteniamo però di specificarle, perchè sono da per loro stesse facili, e chiare, e per lo stesso motivo nelle verità sopra enunciate non abbiamo apportata dimostrazione alcuna.

65. È da notarsi soltanto, che la verità del paragrafo 63 appartenendo tanto a due rette, le quali si trovano in piani diversi, quanto a quelle, che sono paralelle, non potressimo all'istante da queste particolari projezioni ricavare la scambievole posizione, che hanno due rette nello spazio, perchè questa vien ad essere dubbia. Per uscire da tale imbarazzo, non si ha da fare altro, che projettare le due rette nel terzo piano coordinato, se in questo le projezioni risultano tra loro paralelle, saranno pure tali le rette vere, altrimenti esisteranno in piani diversi.

PROJEZIONI DELLE SUPERFICIE.

66. Le superficie dividendosi in piane, o curve, esporremo colla massima brevità ciò, che ad esse appartiene; avvertendo però, che riguardo alle superficie curve, ci restringeremo a considerare quelle, che sono dotate di generazione, e tra queste soltanto le coniche, cilindriche, e sferiche.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE PIANA.

67. Quantunque in natura tutto è limitato, contutto ciò essendo permesso al matematico considerare l' estensione prolungata sino all' infinito; perciò faremo due Ipotesi circa la presente superficie. Nella prima la supporremo limitata, e nella seconda infinita.

I. IPOTESI.

68. Il metodo spiegato, per projettare una linea, non essendo conveniente alla superficie piana, perchè il foglio del disegno non solo resterebbe imbrattato da un grandissimo numero di punti, ma ben anche s' inciamperebbe in una confusione non indifferente, volendo trovare nelle due projezioni i punti corrispondenti; si è stimato perciò sostituirne un' altro, il quale consiste nel projettare soltanto il contorno della superficie; e siccome questo lo sappiamo fare; così eseguito che sarà, il risultato darà la projezione cercata.

69. La superficie piana potendo essere parallela, perpendicolare, ed obbliqua al piano di projezione; i rapporti, che passano tra essa, e le sue projezioni, sono quelli stessi detti per la curva a semplice curvatura. Si noti però, che qualora un piano è perpendicolare a quello di projezione, la traccia in questo rappresenta ben anche la projezione del detto piano.

II. IPOTESI.

70. La superficie piana infinita non avendo contorno alcuno, non si può applicare, per ottenere la sua projezione, il metodo spiegato nella prima ipotesi, ma in vece si adopra il seguente, che è appunto quello di projettare tre suoi punti, o pure due sue rette.

71. È da notarsi però, che per ottenere le projezioni di queste due rette, considerate in qualunque sito del piano, dovendosi tracciare quattro projezioni, cioè due nel piano verticale, e

le altre nel piano orizontale, segue che, se si suppongano essere le due rette gl' incontri del piano, che passa per esse, con i due di projezione; siccome in questa maniera è necessario segnare soltanto due rette, una nel piano orizontale, e l' altra nel piano verticale; così, a causa della facilitazione, seguiremo questo secondo metodo; e quantunque sembra, che le projezioni sono due, e non quattro, per cui si potrebbe dire che le dette rette non sono determinate di posizione, non ostante ciò, tale assertiva svanisce, allorchè si riflette, che per la circostanza di trovarsi una retta nel piano orizontale, e l' altra nel piano verticale, esse rappresentando due projezioni, e le altre due cader dovendo nella comune sezione, perciò in realtà le projezioni sono quattro, e non due.

72. Gl' incontri del detto piano con i due di projezione si chiamano *Tracce*; quella nel piano orizontale vien detta *Traccia orizontale*, e l' altra *Traccia verticale*.

73. Se la presente superficie non si volesse projettare mediante le due tracce, si potrà in un altra maniera, cioè col dare una traccia, e l' angolo d' inclinazione, che il piano dato fa con quello di projezione, nel quale si trova la data traccia.

74. Dalle posizioni delle tracce risultando quelle del piano corrispondente: conviene perciò esaminare le prime, per conoscere le seconde. Si noti però, che non sempre le tracce devono essere due, ma spesso accade, che sia una sola. In fatti se un piano qualunque è paralello ad uno dei due di projezione, come al piano verticale; è chiaro, che non essendovi concorso con questo, non vi sarà la traccia verticale, ma soltan-

to quella orizontale, e questa, per la Geometria solida, dovendo essere paralella alla comune sezione, Perciò.

Se in uno solo dei due piani di projezione esiste la traccia, ed è paralella alla comune sezione, sarà il piano dato paralello a quello di projezione, nel quale non vi è traccia,

75. Un piano essendo concorrente con i due di projezione, se tutti e tre formano la superficie laterale di un prisma triangolare; siccome i tre lati sono tra loro paralelli; così.

Essendo le due tracce paralelle, alla comune sezione; il piano, al quale spettano, sarà non solo concorrente con i due di projezione, ma ben anche formerà con essi la superficie laterale di un prisma triangolare.

76. Se poi li tre detti piani costituiscono la superficie laterale di una piramide triangolare; dovendo in tale caso le tre sezioni concorrere in un punto. Perciò.

Le tracce essendo due non paralelle alla comune sezione, ma con questa concorrenti in un sol punto, il piano delle tracce formerà con i due di projezione la superficie laterale di una piramide triangolare.

77. Supponiamo ora, che il piano sia concorrente, e perpendicolare a tutte e due quelli di projezione; siccome le tre rette d'incontro devono avere un punto comune, ed essere due a due poste ad angolo retto. Perciò possiamo dire, che

Le tracce, le quali partono da uno stesso punto della comune sezione, e sono a questa perpendicolari, appartengono ad un piano, che è perpendicolare ai due di projezione.

78. Finalmente un piano il quale è perpen-

dicolare ad uno dei due di projezione, come a quello orizontale, ed obbliquo al piano verticale; siccome, per la Geometria solida, l' incontro del piano dato col verticale, o sia la traccia verticale, è perpendicolare, e la traccia orizontale obbliqua alla comune sezione. Perciò

Se delle due tracce una è perpendicolare, e l' altra obbliqua alla comune sezione, il piano è perpendicolare a quello di projezione, nel quale la traccia è obbliqua, ed è obbliquo all' altro.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE CONICA.

79. Il metodo generale, per projettare una superficie curva, non consiste in altro, se non nel projettare la sua generazione, o sia la generatrice, direttrice, ed assegnare la legge, secondo lo quale si deve muovere la generatrice. Questo metodo però riceve modificazione, secondo che lo richiedono le particolari circostanze della superficie, come qui appresso esporremo.

80. La superficie conica potendosi considerare infinita, e finita, ed in qualunque delle due Ipotesi venendo generata dal moto di una retta, la quale passando sempre per un punto fisso, che è il vertice, scorre lungo una curva, che rappresenta la direttrice, coll' avvertenza però che se è a semplice curvatura, non deve nel suo piano trovarsi il vertice. Segue, che se in primo luogo la superficie conica è infinita; siccome la generatrice non ha lunghezza determinata; così

La projezione della superficie conica infinita si ottiene, con projettare il vertice, e la direttrice.

81. In secondo luogo nella superficie coni-

ca limitata essendo finita la lunghezza della generatrice. Perciò

La projezione della superficie conica finita si ottiene, con dare la projezione del vertice, della direttrice, e separatamente la lunghezza vera della generatrice, non meno in questa un punto, il quale deve trovarsi sempre nel vertice, o pure scorrere lungo la direttrice, o con qualunque altra condizione.

82. Inoltre essendo permesso supporre, che la direttrice sia base della superficie conica. In questo caso perchè la lunghezza della generatrice in ciascuna delle sue infinite posizioni è determinata dal vertice, e dalla direttrice. Perciò

La projezione della superficie conica, limitata dal vertice, e dalla direttrice, viene dinotata dalle projezioni di queste due ultime.

83. Quantunque pel cono si può inmaginare un' altra generazione (*G. S. 113*); nulladimeno noi seguiremo quella, che qui avanti abbiamo descritta, perchè più facile.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE CILINDRICA.

84. Questa superficie venendo formata da una retta, la quale, nel tempo che si muove paralellamente a se stessa, scorre con un suo punto costante, o variabile lungo una curva immobile. Ne deriva, che per essere tutte le posizioni della generatrice tra loro paralelle, e nella superficie considerata infinita, la generatrice illimitata. avremo che

La projezione della superficie cilindrica infinita si esprime, col projettare la direttrice, e la direzione della generatrice.

85. Qualora poi la superficie si voglia fini-

ta, in questo caso la lunghezza della generatrice essendo limitata. Perciò

La projezione della superficie cilindrica finita si può ottenere in tre diverse maniere. 1°, Con dare le projezioni della direttrice, e quelle di una posizione della generatrice di limitata lunghezza. 2°. Con dare la projezione delle due basi paralelle, e dell' asse; e finalmente in 3°. Con dare le projezioni della direttrice, quelle della direzione della generatrice, e separatamente la vera lunghezza di questa con un punto in essa segnato, il quale deve scorrere lungo la generatrice, o pure con altra legge, che si vorrà.

86. Quantunque può considerarsi un altra generazione di questa superficie (*G. S. 118*), nulla dimeno però seguiremo quella qui avanti spiegata.

87. Intanto è da notarsi, che la differenza, la quale passa tra le due generazioni del cono, non meno che tra quelle del cilindro, non è altra, se non che la linea, la quale in una fà da generatrice, nell' altra esegue le funzioni di direttrice.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE SFERICA.

88. La generatrice, la quale è la mezza circonferenza, avendo sempre una lunghezza limitata; sarà perciò la superficie sferica sempre finita. Inoltre il moto essendo di rivoluzione regolare, e l' asse venendo espresso da qualunque diametro. Segue, che

La projezione di una superficie sferica si può rappresentare in tre diverse maniere 1°. Con dare le projezioni del centro, e la vera

lunghezza del raggio ; 2°. Projettando il centro, ed in uno dei piani coordinati la mezza circonferenza, che gli è paralella, la quale ha per centro quello della sfera. 3°. finalmente con projettare in ciascuno dei due piani coordinati il cerchio massimo che gli è paralello.

C A P. III.

Soluzioni di alcuni problemi.

89. Quanto nei due precedenti capitoli abbiamo esposto, essendo sufficiente per comprendere, ed eseguire le projezioni del punto, della linea, e delle superficie; conviene al presente passare alla esposizione dei problemi di posizione, affinchè i principianti siano istruiti circa le costruzioni grafiche, dipendenti dal sopra esposto metodo Geometrico delle projezioni. Or questi problemi essendo di numero infinito, a causa della ristrettezza della presente scienza, ne apporteremo un sufficiente numero; anzi affinchè la materia resti trattata con ordine, e chiarezza, la divideremo come segue; cioè nel presente capitolo terzo risolveremo quei problemi, che riguardano le linee, le superficie piane, e gl' angoli. Nel quarto mostreremo il modo, come menare un piano tangente ad una superficie curva. Nel quinto troveremo le projezioni del comune incontro di due superficie, le quali non sono piane tutte e due. Finalmente chiuderemo questa scienza col quinto capitolo, il quale da le regole, come sviluppare graficamente una superficie a semplice curvatura.

90. *Data nello spazio una retta terminata, ricavare dalle projezioni la sua vera lunghezza.*

La soluzione non ha bisogno sempre di costruzione, a causa della verità dimostrata nel paragrafo 43. cioè che la projezione di una retta data nello spazio è eguale a questa, qualora è paralella al piano di projezione. Quindi, se le projezioni di una retta sono paralelle alla comune sezione, tale posizione dinotando, che la retta nello spazio, è paralella ai due piani di projezione, basta perciò misurare una delle due projezioni, per conoscere la vera lunghezza della retta.

Se una sola projezione, come quella nel piano orizontale, sia paralella alla comune sezione, in questo caso la retta essendo paralella al piano verticale, la projezione in questo darà la vera lunghezza. Finalmente la retta nello spazio essendo obbliqua ai due piani di projezione, e questa posizione conoscendosi, dal essere le due projezioni concorrenti colla comune sezione, vi è bisogno di una particolare costruzione, per ottenere ciò che si cerca. Perciò

Sia *XY* il foglio del disegno, *AB* la comune sezione, e *CD*. *EF* le projezioni della data retta; sapendo noi, che per ottenere una projezione, come quella orizontale, bisogna dagli estremi della data retta abbassare sul piano orizontale due perpendicolari, ed indi unire i loro piedi con una retta; ne deriva da ciò, che ottenendosi un trapezio colle dette quattro rette, se questo effettivamente si costruisca; sarà la vera lunghezza espressa dal lato opposto a *CD*. Fig. 3

La costruzione potendosi eseguire in qualunque sito, è più facile farla nel piano verticale; tagliata dunque $HI = DC$, dal punto I innalzata sopra HI la perpendicolare $IK = GE$, e condotta la FK; sarà questa la cercata.

PROBL. II.

91. *Data nello spazio una retta, trovare i suoi incontri con i due piani coordinati.*

La detta enunciazione per esser espressa in un modo del tutto generale, e contenendo i diversi casi, nei quali il problema è in tutto o in parte solubile, o insolubile, dipendenti dalle posizioni della retta, non meno che dalla estensione dei piani coordinati; perciò prima di esporre la soluzione, conviene brevemente accennarli, affine di poterli distinguere dalle particolari circostanze, che si assegnano ai dati.

I piani di projezione potendosi supporre finiti, ed infiniti; è chiaro, che se la retta è parallela a tutti e due, in qualunque delle due ipotesi il problema sarà del tutto insolubile; questa posizione si distingue, dall' essere le due projezioni paralelle alla comune sezione.

Se la retta è paralella soltanto ad uno dei due piani (ciò si conosce quando la projezione nell' altro piano è paralella alla comune sezione); sarà il problema, nella ipotesi dei piani infiniti, solubile per uno, ed insolubile per l' altro; e nei finiti solamente solubile col piano concorrente, purchè l' incontro cade dentro il foglio del disegno, altrimenti diverrà del tutto insolubile.

Finalmente la retta essendo concorrente con i due piani (tale posizione si manife-

sta qualora le due projezioni sono obblique alla comune sezione), il problema è del tutto solubile per i piani infiniti, e per li finiti poi, sarà totalmente solubile se gl'incontri cadono tutti e due dentro il foglio del disegno, se fuori del tutto insolubile; e se uno dentro, e l' altro fuori, pel primo sarà solubile, e pel secondo insolubile.

Passiamo alla soluzione supponendo il problema totalmente solubile.

Sia XY il foglio del disegno, AB la comune sezione, e CD, EF le projezioni della retta data. Fig. 4

La CD rappresentando tanto la projezione orizontale della retta, quanto la projezione, e traccia orizontale del piano (che passa per la retta) perpendicolare a quello di projezione orizontale; siccome con questo è concorrente la data retta; così dovrà in primo luogo, l' incontro col piano orizontale trovarsi nella CD, o suo prolungamento.

Inoltre il detto punto d'incontro esistendo nel piano orizontale, e nella vera retta, perciò la sua projezione verticale, dovendo trovarsi nella comune sezione AB, e nella projezione verticale EF della retta, caderà nel punto G loro incontro. Finalmente le projezioni essendo ortografiche, se nel piano orizontale s' innalza dal punto G sopra AB la perpendicolare GI; l' incontro H colla CD sarà quello della retta col piano orizontale.

Similmente, volendo trovare l' incontro col piano verticale, sarà questo il punto K, il quale si ottiene prolungando la projezione orizontale CD sino ad incontrarsi colla comune sezione in L, ed innalzando da questo punto sopra AB, e nel piano orizontale, una perpendicolare, si-

no ad incontrarsi colla projezione verticale *EI'* in un punto ch' è *K*.

Questo punto trovandosi al di sotto di *AB*, cade nel piano verticale negativo.

Dalla detta costruzione si ricava, che nei piani finiti di projezione, il problema è insolubile, se il punto *G* cade fuori il foglio del disegno, o pure cadendo dentro, l'altro *H* viene a trovarsi fuori. Lo stesso vale nel piano verticale, considerando i punti *L*, e *K*.

PROBL. III.

92. *Dato nello spazio un piano, mediante la posizione di tre suoi punti, li quali non siano in linea retta, trovare le tracce.*

Si noti, che al problema si è apposta la circostanza, che i tre punti non si trovino in linea retta, affinchè la soluzione risulti determinata.

Il problema potendo essere solubile per tutti e due i piani di projezione, o per un solo, ed insolubile per tutti e due, a causa delle diverse posizioni, che il piano dato può avere con quei di projezione, non meno che per la estensione di questi. Passiamo perciò a specificare il tutto in astratto, supponendo primieramente, che i piani di projezione siano infiniti, e secondariamente finiti.

Riguardo alla prima supposizione, il piano dato potendo avere con i due di projezione le cinque posizioni, spiegate nei paragrafi 74, 75, 76, 77, 78; è evidente, che in tutte le dette posizioni, il problema è solubile per tutti e due i piani di projezione, eccettuatane una, nella qua-

le risulta solubile per un solo piano, ed è, quando il piano dato è paralello ad uno dei due di projezione. Nella seconda poi, supponendo cioè limitati li due piani coordinati; il problema sarà per tutti e due insolubile o solubile secondo che le tracce (nel caso che il piano dato è inclinato ai due di projezione) cadono fuori o dentro il foglio del disegno; e diverrà per un solo solubile, quando la posizione del dato piano è parallello ad uno dei due di projezione, e la traccia dell' altro cade dentro il foglio di carta, o pure essendo concorrente con tutti e due, una traccia cade dentro, e l' altra fuori del disegno.

Non essendo molto facile conoscere con un colpo d' occhio, se delle due tracce una soltanto, o tutt' e due cadono dentro, o fuori il disegno ci riserviamo trattare tale assunto, dopo avere data la soluzione del problema.

Finalmente in qualche posizione del piano dato non essendovi bisogno di costruzione, e questa in altre potendo essere più o meno facile; conviene perciò spiegarle ad istruzione dei Giovani allievi.

Se solamente in uno dei due piani coordinati, come in quello verticale, le projezioni dei tre punti si trovano in una linea retta paralella alla comune sezione; tale circostanza dinotando, che il piano dato è paralello a quello di projezione orizontale; è pur troppo evidente, che vi sarà una sola traccia, rappresentata dalla detta retta; qualora poi questa retta è inclinata, alla comune sezione; siccome il piano dei tre punti, è perpendicolare a quello di projezione verticale, ed inclinato all' altro di projezione orizontale, così le tracce dovendo essere due: perciò quella verticale sarà espressa dalla detta retta; e l' altra

orizontale dalla perpendicolare alla comune sezione, condotta nel piano orizontale dal punto d' incontro della traccia verticale colla comune sezione.

Se in ciascuno dei due piani di projezione, le rette congiungenti li tre punti, formano una sola colla circostanza, che quella nel piano orizontale fa coll' altra nel piano verticale una sola retta continuata perpendicolare alla comune sezione; le due rette saranno le tracce cercate, perchè il piano viene ad essere perpendicolare ai due di projezione,

All' infuori delle dette posizioni tutte le rimanenti essendo tali, che, le projezioni dei tre punti in ciascun piano, uniti due a due con rette, devono racchiudere spazio, o sia formare una figura triangolare; siccome la soluzione risulta più difficile; così passiamo ad esporla colla massima possibile brevità, e chiarezza. Perciò

Fig. 5 Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; ed *F*, *G*, *H*; *C*, *D*, *E* le projezioni orizzontali, e verticali dei tre dati punti.

I tre punti *F*, *G*, *H* si uniscano tra loro per mezzo di rette, e lo stesso si facci per gl' altri *C*, *D*, *E*: con tale operazione ottenendosi due triangoli, che sono le projezioni di quello esistente nello spazio, e del quale i tre punti dati ne sono i vertici; è chiaro, che per trovare le due tracce, non si ha da fare altro, se non prolungare il piano del vero triangolo sino ad incontrare i due di projezione: Per fare ciò, dovendosi prolungare i tre lati del triangolo, i quali, generalmente parlando, devono passare per le due tracce. Perciò i loro punti d' incontro col piano orizontale uniti con una retta, e con un' altra quelli col piano verticale; queste

due rette rappresenteranno le tracce cercate ; or per determinare la posizione di una retta, essendo sufficiente fissare due suoi punti. Trovando dunque gl' incontri di due soli lati del triangolo con i piani di projezione, si sarà risoluto il problema.

Per eseguire la costruzione nel disegno, si prolunghi CD sino all' incontro I colla comune sezione, su di questa innalzata nel piano orizontale la perpendicolare IK, che incontra in K, la FG, corrispondente a CD; sarà K il punto d' incontro col piano orizontale di un lato del triangolo. Parimenti trovato il punto M incontro col piano orizontale di un altro lato, come quello corrispondenti a DE, ed uniti li due punti K, M con una retta, esprimerà KM la traccia orizontale. In una simile maniera trovando i due punti d' incontro, col piano verticale dei due lati espressi da CD, DE, resterà disegnata la traccia verticale.

Si noti 1.°, che se la traccia orizontale incontra la comune sezione dentro il foglio di carta, come in N, essendo questo punto comune ben anche alla traccia verticale, nel trovare questa, bisogna determinare soltanto l' incontro col piano verticale di uno, e non già di due lati del triangolo. 2.° Se ninno dei tre lati incontra la comune sezione dentro il foglio del disegno, in questo caso da uno de' tre punti, come G, bisogna tirare due rette GO, GP tali, che incontrano AB dentro il foglio del disegno; indi dai punti O, P abbassate le perpendicolari sopra di AB, che incontrano la CE corrispondente ad FH, nei punti Q, R, condotte DQ, DK, si farà uso dei due lati espressi in projezione orizontale da GO, GP, ed in projezione ver-

ticale da DQ, DR, in vece dei primi due, che non incontrano la comune sezione AB dentro il foglio del disegno.

95. Passiamo ora ad esporre il modo, come conoscere, se, essendo il piano obbliquo con i due di projezione, le tracce cadono dentro, o fuori il foglio del disegno.

I punti K, M cadendo dentro il detto disegno, è pur troppo manifesto, che la traccia orizontale sempre si può rappresentare, il dubbio soltanto nasce, quando i due punti I, L cadono fuori, o pure trovandosi dentro, gl' altri K; M esistono fuori; per risolverlo

Fig. 6 Siano C, D, E, ed M, G, H le projezioni verticali, ed orizontali dei tre punti dati. Si facci muovere il piano di questi punti parallellamente a se stesso, in modo che i tre punti scorrano lungo le loro rispettive perpendicolari, abbassate sul piano orizontale, finchè il punto il meno distante, che nella presente figura è E, si trovi nel piano orizontale, in questa posizione la projezione orizontale restando la stessa, e variando soltanto la projezione verticale, per trovarla; dal punto L si conduca LK parallella ad ED, dal punto K la KI paralella a DC, finalmente uniti con una retta li punti I, L, il triangolo IKL esprimerà la nuova projezione verticale del triangolo. Or di questo la traccia orizontale dovendo passare pel punto H, per determinarla, bisogna avere un altro punto, a fare ciò, si trovi l' incontro col piano orizontale della retta corrispondente a KI e supposto essere F, condotta la HF, sarà questa la richiesta. Se ora il piano del triangolo con un moto opposto si rimette nella sua primitiva posizione; siccome la traccia orizontale corrispondente deve

essere parallela, e distante da HF pel quarto proporzionale trovato in ordine a KO; GN ed EL, (la GN è perpendicolare alla HF), non meno che cadere verso la parte di XZ; così dall'angolo, Z, più distante dei due X, Z dalla FH, abbassata su di questa una perpendicolare ZP, se risulta minore del quarto proporzionale; la traccia orizzontale cade fuori il foglio di carta; se minore, si trova dentro. Finalmente in questo caso, tagliata $PQ=$ al quarto proporzionale, e dal punto Q condotta QR paralella ad FH, si sarà trovata la traccia orizzontale, indipendentemente dai punti d'incontro delle rette corrispondenti alle DE, DC.

Una simile costruzione eseguendo per trovare la traccia verticale; si sarà perciò, mediante tutto quello che si è detto, assegnato il modo come conoscere, se una o tutte due le tracce cadono dentro, o fuori il foglio del disegno.

Se il prolungamento di KI incontrasse fuori del disegno la comune sezione AB, in questo caso nel triangolo KIL si deve dal punto K tirare un altra retta, che concorra con AB tra i suoi estremi, essendo ciò sempre possibile, e supposto fatto, si proseguirà la rimanente costruzione, spiegata per la KI.

Nei rapportati problemi siamo entrati in molte specificazioni, affine d'istruire i Giovani principianti nel modo di disaminare, e sminuzzare tutti li casi aderenti ad un problema. Or tale sistema riuscendo molto lungo, se si volesse adottare per i susseguenti problemi compresi in questo capitolo. Perciò quanto abbiamo detto essendo sufficiente a servire di norma, nel caso che si volesse far lo stesso con qualunque altro problema, procureremo in appresso essere più brevi,

PROBL. IV.

94 *Data nello spazio una retta, e fuori di essa un punto, da questo abbassargli una perpendicolare.*

Essendo permesso scegliere tra gl' infiniti piani verticali quello che si vorrà; supporremo, che sia parallello alla data retta, e quindi la sua projezione orizontale deve essere parallella alla comune sezione.

Fig. 7 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF le projezioni della data retta, e G, H quelle del punto.

Supponendo, in astratto, essere abbassata la perpendicolare proposta; se dal punto d' incontro colla retta su di questa s' immaginano innalzate infinite perpendicolari, tra le quali esiste la cercata; siccome esse tutte esistono in un piano perpendicolare alla data retta; così essendo questa paralella al piano verticale. Sarà la projezione verticale del detto piano, e quindi della cercata perpendicolare, rappresentata da una retta perpendicolare alla projezione verticale della data, che passa per la projezione verticale del punto. Perciò abbassata da H sopra EF la perpendicolare HI, e dal punto d' incontro I sopra la comune sezione l' altra indefinita IK, che incontra la projezione orizontale CD nel punto K, condotta la GK; rappresenteranno HI, GK le projezioni verticali ed orizontali della richiesta perpendicolare. Si noti, che se la retta è obbliqua al piano verticale: menandosene un altro, che sia paralello alla data retta, ed in esso trasportando le projezioni della retta, e del punto si troverà, come si è qui avanti detto, la projezione orizontale della perpendicolare; in conseguenza di

questa projezione determinandosi quella nel dato piano verticale, si sarà sciolto il problema.

PROBL. V.

95. *Far passare un piano per un punto non esistente in una retta, il quale a questa sia perpendicolare.*

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF le projezioni della data retta, ed H, G quelle del punto. Fig. 8

Per CD immaginando passare un piano perpendicolare a quello di projezione orizzontale, e pel punto dato un altro perpendicolare alla data retta, che risulta perpendicolare al piano, che passa per CD; saranno il piano orizontale, ed il cercato perpendicolari a quello per CD. Quindi per la geometria solida, la comune sezione dei due primi piani, o sia la traccia orizontale del piano che si cerca, sarà perpendicolare a CD projezione orizontale della data retta. Nella stessa maniera si dimostrerà, che la traccia verticale è perpendicolare alla EF projezione verticale della retta.

Per terminare la soluzione non si ha da fare altro, che abbassare dal punto dato sulla retta una perpendicolare, e trovare il suo incontro col piano orizontale: supponendo tal punto essere I, se da questo si conduce LIK perpendicolare a CD, e dall'incontro L colla AB si abbassa sopra EF la perpendicolare LM, le due LK, LM saranno le tracce cercate.

PROBL. VI.

96. *Per un punto esistente fuori di un piano, concorrente con i due di projezione, farne passare un altro paralello al dato.*

Fig. 9 Esprima XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, DE le tracce del piano dato; ed F, G le projezioni del punto.

Il piano cercato dovendo essere paralello al dato, le tracce del primo per la geometria solida devono essere rispettivamente paralelle a quelle del secondo. Altro perciò non resta a fare, che pel punto dato far passare una retta paralella al piano dato, e trovare l'incontro con un piano di projezione, indi da questo punto condotta la paralella alla rispettiva traccia, e dall'incontro di questa colla comune sezione menata una paralella all'altra traccia, le due paralelle saranno le tracce cercate.

Per eseguire la costruzione, si facci passare pel dato punto un piano orizontale, la traccia verticale di questo essendo la retta GP paralella ad AB, se la traccia verticale CD del dato piano ha tale posizione, che è incontrata dalla GP fuori il disegno, si tagli QH di tale lunghezza, che non solo sia commensurabile con QG, ma benanche la HI paralella ad AB, incontri la CD in un punto come I.

Inoltre supponiamo che HQ sia il terzo di QG, se si abbassa dal punto I sopra AB la perpendicolare IK, si sarà determinato nel piano dato un punto I, il quale ha la stessa altezza sul piano orizontale, che il punto H, e se dal punto K si mena sopra DE la perpendicolare KL, esprimerà questa la projezione orizontale di una retta perpendicolare ad LD, esistente nel dato

piano, ed L il punto d' incontro col piano orizontale. Finalmente verso X, che è l' angolo del foglio del disegno il più distante dalla DE, dovendo cadere la traccia orizontale; risulta, che se si abbassa da X sopra DE la perpendicolare XN, e si' tagli $NR = FM + 3KL$, per essere $GQ = 3HQ$, se pel punto R si conduce una paralella ad ED, si sarà trovata la traccia orizontale. Similmente operando col piano verticale, resterà risoluto il problema.

Si noti, che se XN ri ritrova maggiore di $FM + 3KL$, la traccia orizontale non potrà ottenersi, perchè cade fuori del disegno, e lo stesso accadendo per la traccia verticale, questa circostanza dinota, che il problema è del tutto insolubile, se il contrario, totalmente solubile, e se una dentro, e l' altra fuori, in parte solubile.

PROBL. VII.

97. *Dati due piani concorrenti tra loro, e con i due di projezione, trovare il comune incontro dei due primi.*

Risolveremo il caso più difficile, il quale consiste nel non incontrarsi le tracce verticali dentro il foglio del disegno, e neppure quelle orizontali.

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione, CD, DE le tracce di un piano, FG, GH quelle dell' altro. Fig. 10

Si faccino tagliare i due dati piani da un altro orizontale, le due sezioni, per essere rette orizontali, verranno rappresentate nella projezione verticale dalla sola retta LM paralella ad AB, e per essere paralelle alle tracce orizontali, devono nella projezione orizontale essere dinotate da rette rispettivamente paralelle alle DE, GH. Quindi

dai punti L, M abbassate sopra AB le perpendicolari LN, MO, e dai punti N, O tirate le NP, OP (che s'incontrano in P) paralelle alle omologhe DE, GH; sarà P la projezione orizontale di un punto del cercato incontro; se da P si abbassa sopra AB la perpendicolare, che incontra in Q la LM; sarà Q la projezione verticale corrispondente a P.

Similmente menato un secondo piano orizontale, si troveranno altri due punti, projezioni di un secondo punto dell' incontro dei piani. Finalmente uniti con una retta li due punti in projezione orizontale, e con un altra quelli in projezione verticale, con tali rette otterremo le projezioni del comune incontro dei due piani dati.

PROBL. VIII.

98. *Dato un piano obbliquo ai due di projezione, ed un punto fuori di esso, far passare per detto punto una retta perpendicolare al piano, e trovare il loro punto d'incontro.*

Fig. 11. Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, DE le tracce del dato piano, ed F, G le projezioni del punto.

S'immagini, in primo luogo, abbassata del punto dato sul piano inclinato la perpendicolare, per questa potendo passare infiniti piani tutti perpendicolari al dato, tra essi ve ne sarà un solo, che chiamiamo M, perpendicolare alla retta DE esistente nel piano inclinato. Or questa DE, perchè traccia orizontale, essendo retta orizontale, sarà tanto ad essa, quanto al piano orizontale perpendicolare M; ma in questo esiste la perpendicolare cercata. Dunque abbassando da F sopra DE la perpendicolare FH, siccome questa dino-

ta la projezione orizontale del piano M, esprimerà benanche quella della richiesta perpendicolare. Similmente la sua projezione verticale sarà rappresentata dalla perpendicolare GI menata dal punto G sopra CD.

In secondo luogo il piano, che nominiamo S, il quale passa per la ritrovata perpendicolare, e per la sua projezione verticale GI essendo perpendicolare al piano verticale; è chiaro, che se s' innalza da I sopra AB la perpendicolare IN saranno GI, IN le tracce del piano S. Or queste tracce incontrandosi colle rispettive del dato piano nei punti K, N, dei quali le projezioni orizontali (avendo dal punto K abbassata sopra AB la perpendicolare KL) sono L, N; sarà la retta NL la projezione orizontale dell' incontro del piano S col dato, ma per questo incontro deve passare la perpendicolare trovata. Dunque il punto O, sezione delle due FH, LE, è la projezione orizontale dell' incontro dimandato della perpendicolare col piano dato. Finalmente abbassando dal punto O sopra la AB una perpendicolare, che incontri la GI projezione verticale della perpendicolare in P; siccome questo è la projezione verticale corrispondente ad O; così mediante quanto finora abbiamo detto nel presente problema, resta questo completamente risoluto.

PROBL. IX.

99. *Dato un piano inclinato ai due di projezione; trovare l'angolo d' inclinazione che fa con ciascuno di essi.*

Sia XY il disegno, AB la comune sezione, Fig. 14
e CD, DE le tracce del dato piano.

Sappiamo dalla geometria solida che l' an-

golo dimandato è quello, che si forma dalle due perpendicolari all' incontro dei due piani, innalzate da un suo punto, e delle quali una si trova in una e l'altra nell'altro piano. Ciò posto, supponiamo, che si voglia trovare l'angolo d'inclinazione, che fa il piano dato con quello di projezione orizontale. Esprimendo la retta *DE* l'incontro di questi due piani, se sopra di essa s'immaginano innalzate da un suo punto *F* le due sopradette perpendicolari; siccome il piano, che passa per queste, è perpendicolare a quello orizontale, perchè *DE* è orizontale; così la *FG* perpendicolare a *DE*, ed esistente nel piano orizontale, dinoterà dell' angolo cercato la projezione orizontale. Or questa projezione non somministrando la grandezza dell' angolo; è manifesto, che se in *FG* si determina un punto *H*, e si suppone essere *FH* la projezione orizontale di un triangolo rettangolo, del quale il cateto verticale è espresso dal punto *H*, e l' altro cateto orizontale dalla *FH*, costruito questo triangolo, l'angolo, che corrisponde al punto *F*, sarà il cercato. Inoltre un triangolo restando determinato, qualora sono cognite tre sue cose; siccome in quello, che veniamo di dire, ne abbiamo soltanto due, cioè il cateto orizontale *FH*, e l' angolo retto; così conviene determinare il cateto verticale, dinotato dal punto *H*. Per trovarlo si tiri alla *DE* dal punto *H* la paralella *HI*, questa esprimendo la projezione orizontale di una retta orizontale, esistente nel piano dato, sarà l'altezza del punto *H*, eguale a quella di *I*; ma questa è eguale ad *IK*, perpendicolare innalzata dal punto *I* sopra la comune sezione, e che termina nella *CD*; dunque con questa *IK* resterà determinato il cateto verticale, e quindi il triangolo.

Per costruirlo si prolunghi *IH* indefinita-

mente, indi tagliata $HL=IK$ e congiunta FL, essendo FHL il detto triangolo rettangolo, sarà l'angolo HFL la vera grandezza dell' angolo cercato.

Una simile costruzione eseguendosi, per trovare l' altro angolo, cioè quello, che il piano dato fa col piano verticale, si sarà risoluto il problema.

Si noti, che il punto H si deve prendere talmente distante da F, che la perpendicolare IK incontri dentro il foglio del disegno la DC.

PROBL. X.

100. *Dati due piani tra loro concorrenti, non meno che con quelli di projezione; trovare l' angolo d' inclinazione dei due primi piani.*

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, DE le tracce di un piano; e CF, FE quelle dell' altro. Fig. 13

I due dati piani con i due di projezione formando una piramide triangolare, due delle quattro facce, cioè DEF, DCF sono di vera grandezza, le altre, accorciate, ed espresse in projezione orizontale, e verticale, dai triangoli GDE, GFE, e dagl' altri DCH, HCF. I lati poi sono tutti di vera grandezza, eccetto un solo, che è l' incontro dei due dati piani, del quale le projezioni, sono CH, GE.

L' angolo cercato essendo formato da due rette perpendicolari all' incontro dei due piani, le quali partono da un punto del detto incontro, e si trovano una in uno, e l' altra nell' altro piano; per ritrovarlo, bisogna determinare la vera grandezza dei detti due triangoli DGE, GEF.

Si facci perciò girare intorno la traccia orizontale DE il triangolo vero di DGE, il suo vertice

G descrivendo una periferia di cerchio, del quale il piano è perpendicolare tanto a quello orizzontale, quanto alla retta *DE*, caderà perciò la projezione orizzontale di detta periferia nella retta indefinita *GI* perpendicolare a *DE*; se centro *D*, intervallo *DC* si descrive un arco di cerchio, che taglia in *I* la *GI*, condotte le *ID*, *IE*, il triangolo *IDE* sarà il vero corrispondente a *DGE*. Similmente si troverà l' altro vero triangolo *FKE* spettante ad *FGE*.

Or il piano delle due perpendicolari formando nella piramide una sezione, che è un triangolo, se si costruisce questo, uno dei suoi tre angoli darà quello, che si cerca. Per far ciò nelle due *EI*, *EK* (le quali, nel rimettere i due triangoli *DEI*, *FKE* nella loro vera posizione, facendoli girare intorno *DE*, *EF*, combaciar devono tra loro, e formare l' incontro dei due piani) tagliate le porzioni *EL*, *EM* tra loro eguali, e dai punti *L*, *M* innalzate sulle rispettive *EI*, *EK* le perpendicolari *LN*, *MO*, che incontrano in *N*, *O* le *DE*, *EF*, se si conduce la *NO*; le *LN*, *MO*, le quali dinotano le due vere perpendicolari, e la *NO* sono i tre lati del qui avanti detto triangolo. Finalmente centri *N*, *O* intervalli *NL*, *OM* descritti due archi di cerchio, li quali s' incontrano in *P*, tirate le rette *NP*, *PO*, siccome *NPO* è il triangolo, sezione del piano delle due perpendicolari colla piramide, così l' angolo *NPO* è il dimandato.

101. Li qui sopra spiegati problemi, si possono chiamare ausiliarii, perchè di uno, o più di essi bisogna sempre fare uso negl' innumerevoli problemi di posizione, che occorrono risolversi, secondo le particolari circostanze dei dati

Per farne ora vedere la loro applicazione, non meno che per meglio sviluppare l' immaginazione dei principianti, e fare osservare, per quanto si potrà, il metodo, che tener si dee; apporteremo qui appresso alcuni altri problemi.

PROBL. XI.

102. *Dalle projezioni di una curva esistente nello spazio, ricavare se sia a semplice curvatura.*

Risolveremo il caso, nel quale la conoscenza è dubbia, che è appunto, qualora le due projezioni sono linee curve.

Supponiamo per un momento, che la curva vera sia a semplice curvatura; è chiaro, che tirate in essa quante seganti si possono, siccome si trovano tutte in un sol piano, così i loro incontri con uno dei due di projezione, esister devono in una linea retta. Ciò posto.

Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; *CEF*, *GIK* le projezioni della curva. Fig.14

Si tiri nella projezione verticale una segante *DE*, indi dai punti *D*, *E* abbassate sulla comune sezione due perpendicolari, e supponendo essere i punti d'incontro *H*, *I* colla curva *GIK*, i corrispondenti a *D*, *E*, congiunti colla retta *HI*, sarà questa la projezione orizontale della segante. Avute le projezioni, si troverà l'incontro della vera segante con uno dei due piani di projezione, come col piano orizontale. Similmente determinate le projezioni di quante altre seganti si possono tirare, non meno che i loro incontri col piano orizontale, se tutti questi si trovano in linea retta; la data curva sarà a

semplice curvatura, altrimenti a doppia curvatura.

PROBL. XII.

103. *Data una retta, ed un punto in essa, far passare per detto punto una seconda retta, che facci colla prima, e col piano orizzontale angoli determinati*

Per facilitare la costruzione preferiremo, tra gl' infiniti piani di projezione verticale, quello, che è paralello alla data retta.

Fig. 15 Sia *XY* il foglio del disegno: *AB* la comune sezione; *CD*, *EF* le projezioni della retta; *G*, *H* quelle del punto; *I* l'angolo che la cercata retta deve fare col piano orizzontale: e *K* l'altro colla data retta, della quale considereremo soltanto la porzione *HD*.

Nel lato *IO* dell' angolo *I* si trovi il punto *L* tale, che la perpendicolare *LM* sia eguale all' altezza *HN* del punto dato sul piano orizzontale; ciò fatto, se centro *G*, intervallo *GP*, eguale ad *MI*, descrivesi il cerchio *PcQ*, si sarà ottenuto un cono retto, del quale la base esistente nel piano orizzontale è il cerchio *PcQ*, la projezione orizzontale del vertice è il punto *G*, e la projezione verticale del triangolo per l' asse, paralello al piano verticale, viene rappresentata dal triangolo *SHR*, determinato dalle rette *HS*, *HR*, che uniscono il punto *H* con i due *S*, *R*, incontri colla comune sezione delle tangenti al cerchio *PcQ*, menate dagli estremi *P*, *Q* del diametro paralello ad *AB*: ed *HS* dinota il vero lato del cono. Inoltre ogni lato di questo soddisfacendo ad una condizione; cioè di formare col piano orizzontale un angolo eguale ad *I*; resta soltanto ad adempire l' altra condizio-

ne; o sia trovare tra gl' infiniti lati di questo cono quello, che formar deve colla retta data un angolo eguale a K.

Per fare ciò, se il lato; che deve soddisfare alla seconda condizione, si fa girare intorno la data retta, formando sempre con questa lo stesso angolo eguale a K, si genererà un secondo cono retto; del quale l' asse è la retta data, il vertice è il punto dato, e la base circolare, per essere perpendicolare alla data retta, la quale è paralella al piano verticale, sarà perpendicolare a questo; quindi la sua projezione verticale dev' essere espressa da una retta perpendicolare a CD. Segue da ciò, che siccome il lato del primo cono, il quale deve soddisfare alla seconda condizione, nel girare intorno la retta data, due sue posizioni devono essere paralelle al piano verticale, ed in queste posizioni l' angolo, che ciascuna deve fare colla data retta, è eguale a K; così dal punto H tirate HT HV, che faccino colla DC gl' angoli THD, DHV ogn' uno eguale a K, e tagliata HT, non meno che HV eguale ad HS, vero lato del primo cono, se si conduce la TV; rappresenterà THV la projezione verticale del triangolo per l' asse (del secondo cono) paralello al piano verticale, e la retta TV la projezione verticale della base.

Or questi due coni, che hanno lo stesso vertice, potendo avere tra loro tre posizioni; cioè di non incontrarsi, di essere tangenti, o pure seganti, se ne avranno le particolari conoscenze dalle projezioni verticali dei due triangoli per gl' assi THV, SHR. Infatti se il lato HV cade tra DH ed HS, o pure HC ed HR, si verificherà la prima posizione, nella quale il problema è insolubile; se in HS, o pure HR, otterremo la

seconda posizione, ed in questa il problema è semplicemente solubile; se finalmente nell' angolo *SHR*, la posizione sarà la terza, ed il problema è doppiamente solubile. Nella presente figura verificandosi la terza posizione; siccome le projezioni verticali delle due basi sono *TV*, *SR*, le quali si segano in *a*; così tirata la retta *Ha*, sarà questa la projezione verticale dei due lati del primo cono, li quali soddisfano ben anche alla seconda condizione; se dal punto *a* s' innalza sopra di *AB* una perpendicolare, la quale incontra la circonferenza *PcQ* nei due punti *b*, *c*, condotti li raggi *Gb*, *Gc*, essendo questi le projezioni orizontali corrispondenti ad *Ha*, si sarà doppiamente sciolto il problema, perchè la retta cercata potrà essere rappresentata in projezione orizontale dalla *Gc*, non meno che dalla *Gb*, ed in projezione verticale dalla *Ha*.

104. Non sarà cosa fuor di proposito, fare qualche riflessione, mediante la quale, si possa conoscere dalla grandezza degl' angoli dati, non meno che da quello d' inclinazione col piano orizontale della data retta, se il problema è semplicemente, o doppiamente solubile, o pure insolubile. Infatti essendo *AB* la comune sezione, Fig.16 *CDE* la projezione verticale del triangolo per l' asse, paralello al piano verticale, che appartiene al primo cono, *DF* la projezione verticale della data retta, paralella al piano verticale; e l' angolo *MFB* quello d' inclinazione, che essa forma col piano orizontale: per ciò, che si è detto di sopra, è manifesto; che nella prima ipotesi le posizioni della retta cercata, le quali rendono insolubile il problema, sono due, cioè *DG*, *DH* comprese negli angoli *FDC*, *MDE*. Nella seconda le altre due, che lo fanno

semplicemente solubile, cadono nei due lati DC, DE del cono; e nella terza le rimanenti due, che danno il problema doppiamente solubile, sono appunto DN, DO, le quali si trovano dentro gl' angoli CDP, EDP formati dalla perpendicolare DP, abbassata dal vertice D sulla base CE, e dai lati DC, DE.

Ciò posto, per brevità di espressione chiamando K l' angolo DFB, L quello che la data retta formar deve colla cercata, ed I il terzo, cioè l' altro, che la cercata retta deve fare col piano orizontale, il quale deve essere sempre minore dell' angolo retto DPC, acciò si possa generare la prima superficie conica. E chiaro, che nella prima posizione DG della 1.ª ipotesi essendo l' angolo DCE maggiore di DGC, e questo eguale ai due GFD, FDG, sarà non solo I maggiore di $K+L$, ma benanche $I+K+L$ minore di due angoli retti; nella seconda posizione DH, risulta, che I è minore di $K+L$, ed $I+K+L$ è maggiore di due angoli retti. Lo stesso ragionamento eseguendo per le posizioni DC, DE: DN, DO, appartenenti alle altre due ipotesi, otterremo i corrispondenti risultati espressi dalle due tavole seguenti.

Il problema		Tavola I.	Tavola II.
è insolubile	1.°	se $I>K+L$,	ed $I+K+L<$ di due retti
	2.°	se $I<K+L$,	ed $I+K+L>$ di due retti
è semplicemente solubile	1.°	se $I=K+L$,	ed $I+K+L<$ di due retti
	2.°	se $I<K+L$,	ed $I+K+L=$ a due retti
è doppiamente solubile	1.°	se $I<K+L$,	ed $I+K+L<$ di due retti
	2.°	se $I<K+L$,	ed $I+K+L<$ di due retti

da queste due Tavole si ricava, in ultimo, che

Il Problema		
è insolubile	1.° se $I > K+L$ 2.° se $I+K+L >$ di due retti	
è semplicemente solubile	1.° se $I = K+L$ 2.° se $I+K+L =$ due retti	
è doppiamente solubile	se non solo $I < K+L$, ma ben anche $I+K+L <$ di due retti	

Per maggior chiarezza facciamo qualche applicazione, considerando primieramente essere data la grandezza di ciascun angolo in gradi. Perciò sia $I = 85.°$ $K = 30.°$ ed $L = 77.°$ da tali dati risultando $85.° + 30.° + 77.° >$ di due retti; sarà insolubile il problema.

Se $I = 52.°$, $K = 10.°$ $L = 42.°$, essendo $52.° = 10.° + 42.°$ sarà il problema semplicemente solubile ect.

In vece di determinare gl' angoli per mezzo di gradi, volendoli che siano espressi graficamente da *RIQ*, *TKS*, *ZLV*, mettendo questi tre angoli uno appresso l' altro, come *VLZ*, *ZLa*, *aLb*, non vi è dubbio, che paragonando tutti essi con i due retti, per sapere se gli sono eguali, maggiori, o minori, o pure se *bLa*, che è eguale all' angolo *I*, è eguale, maggiore, o minore della somma degli altri due, si avrà la conoscenza che si desidera.

105. Una curva nello spazio potendo restar determinata in due modi, 1.° mediante le sue projezioni, e 2.°, se la curva è piana, con dare il piano nel quale si trova tracciata, e se è a doppia curvatura, con stabilire le superficie curve, nella comune sezione delle quali trovar si deve; cèhiaro, che in questo secondo modo bi-

sogna risolvere un problema, che è quello di tracciare le projezioni della curva. Per ora esporremo il caso della curva piana, la quale supporremo essere un cerchio, per mostrare il metodo, come descrivere l'ellisse; riserbandoci l'altro, appartenente alla curva a doppia curvatura, nel quinto capitolo, il quale è destinato appunto per questo oggetto.

PROBL. XIII.

106. *Dato un cerchio, descritto in un piano di cognita posizione, ritrovare le sue projezioni orizzontale, e verticale.*

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD la traccia orizzontale del piano dato; FDE il suo angolo d'inclinazione col piano di projezione orizzontale; GP il cerchio descritto nel piano inclinato, che si suppone abbassato sul piano orizzontale, essendosi fatto muovere intorno la traccia CD.

Si prenda nella curva GP un punto qualunque G, questo nel mettersi il piano nella sua vera posizione, descriverà una circonferenza di cerchio, la quale in projezione orizzontale cader deve nella perpendicolare GK, abbassata dal punto G sopra CD; quindi in detta perpendicolare trovar si deve la projezione orizzontale del punto G.

Inoltre il piano dell'angolo EDF, posto nella sua vera posizione, essendo perpendicolare alla CD, e parallelo alla GQ, segue, che tagliata $DI=GQ$, ed abbassata da I sopra DE la perpendicolare IL, la quale risulta paralella a CD, esprimerà LQ la projezione orizzontale della GQ, posta nella sua vera posizione: quindi il punto L è la projezione orizzontale del punto G, ed IM

l' altezza sua sul piano orizontale. La projezione verticale poi è il punto O, il quale si ottiene, abbassando dal punto L sopra la comune sezione AB la perpendicolare, e tagliando $NO=IM$. La stessa costruzione eseguendo per quanti altri punti si vogliono considerare nella circonferenza GP, otterremo un numero di punti nel piano orizontale, ed un altro nel piano verticale. Finalmente unendo i primi con una curva, e con un' altra i secondi, con esse, che sono le projezioni della data, resterà sciolto il problema.

Si noti, che il dato piano essendo obbliquo ai due di projezione, risulteranno due ellissi, di ciascuna delle quali l' asse maggiore non solo è eguale al diametro del dato cerchio, ma ben anche parallello alla rispettiva traccia. L' asse minore poi risulta in conseguenza.

PROBL. XIV.

107. *Data una retta, trovare la sua projezione in un piano inclinato ai due di projezione.*

Fig. 18 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF le projezioni verticale ed orizontale della data retta, e GH; HI le tracce del piano inclinato ai due di projezione, nel quale si deve projettare la data retta.

Essendo sufficiente projettare due punti di questa, come quelli corrispondenti ad F, E; siccome sappiamo, che la perpendicolare FK, menata dal punto F sopra la traccia orizontale HI, è la projezione orizontale della vera perpendicolare, abbassata sul piano inclinato da uno dei due punti della data retta; così conviene trovare l' incontro di questa perpendicolare col piano incli-

sato. Per rinvenirlo, s' immagini passare per FK un piano verticale, in questo trovandosi il punto vero di F, e l'incontro, che questo piano fa col dato; queste due cose non potendosi osservare con distinzione nella projezione orizontale, perchè cadono nella sola retta FK, perciò si abbassi il piano verticale, passante per FK, sull' orizontale, facendolo muovere intorno la FK; nel moto il vero punto di F descrivendo una circonferenza di cerchio, la quale in projezione orizontale cade nella FL perpendicolare ad FK; segue, che tagliata $FL=TD$, dinoterà L il vero punto spettante ad F. Per trovare ora la seconda cosa, cioè l' incontro del piano verticale per FK col dato, dovendo la retta d' incontro partire dal punto P, non si ha da fare altro, che rinvenire un secondo punto. A tale oggetto si determini nella FK un punto qualunque M, da questo condotta la MR paralella ad HI, e da R, incontro colla AB, sù di questa innalzata una perpendicolare sino alla traccia verticale GH, essendo GR l' altezza sul piano orizontale del punto vero di M, esistente nel piano inclinato; perciò prolungata RM indiretto, tagliata $MO=RG$, e congiunta la PO; sarà questa la detta sezione. Finalmente abbassata dal punto L sopra PO la perpendicolare LQ, essendo Q il punto d' incontro della perpendicolare abbassata dal punto vero spettante ad F col piano inclinato, se centro P, intervallo PQ si descrive un arco di cerchio, che incontra in N la FK; sarà N la projezione del punto vero, corrispondente ad F, nel piano inclinato abbassato sul piano orizontale. La stessa costruzione eseguendo per l' altro punto E, e supponendo corrispondere ad S, tirata la NS, sarà questa la cercata projezione della retta.

108. *Date due rette nello spazio, le quali esistono in piani diversi, trovare la vera lunghezza della loro più corta distanza.*

Fig. 19 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF le projezioni di una; e GH, LM quelle dell' altra retta.

Potendo per le due date rette passare due piani uno per ogn' una, i quali sono tra loro paralelli, e che si troveranno facilmente, menando da un punto della LM una paralella ad EF, e da un punto di questa un'altra paralella ad LM, supposto condotte queste rette, e ritrovate le tracce dei due piani espresse da IK, NO, le quali risultar devono tra loro paralelle, passiamo alla soluzione.

La più corta distanza essendo la perpendicolare a questi due piani; perciò da un punto P di uno di essi abbassata sulla traccia NO dell' altro piano la perpendicolare QPO, in questa cader deve la projezione orizontale di una delle infinite posizioni della più corta distanza. Per trovare ora la sua vera lunghezza; siccome essa si ritrova nel piano verticale, che passa per QPO, ed il quale incontra il piano della traccia NO in una retta espressa in projezione orizontale dalla stessa QPO, così per osservare il tutto, si abbassi questo piano verticale sull' orizontale, facendolo girare intorno la QO; or il detto incontro dovendo passare pel punto O, e per un altro punto vero, come quello corrispondente a Q; perciò abbassata da questo sopra di AB una perpendicolare, la quale incontra la DC, corrispondente ad EF, nel punto R; sarà SR l' altezza del punto Q. Quindi sopra QO innalzata la per-

pendicolare $QT=SR$, congiunta la TO, ed abbassata su di questa dal punto P la perpendicolare PV. È chiaro, che questa è la vera lunghezza della più corta distanza cercata.

Se nelle projezioni delle due date rette si volessero trovare i punti, che corrispondono agli estremi di detta più corta distanza; si abbassi dal punto V sopra PO la perpendicolare VZ, essendo PZ la projezione orizontale della più corta distanza, non si ha da fare altro, che trovare nei lati La, Ea due punti uno per ogn' uno, ma tali, che la congiungente sia eguale, e paralella alla PZ. Essendo facilissima questa operazione, si tralascia per brevità. Inoltre gl' estremi di questa congiungente potendosi trovare nei prolungamenti aM, aF dei detti lati; perciò la projezione orizontale della più corta distanza, della quale gl' estremi si trovano nelle rispettive date rette, è doppia. Finalmente in conseguenza delle projezioni orizontali trovando le projezioni verticali, si sarà completamente risposto alla dimanda.

PROBL. XVI.

109. *In un angolo solido, quadriedro, nel quale un angolo diedro sia rientrante; determinare il luogo geometrico, che ci facci conoscere, quando la somma di tutti gl' angoli piani del detto angolo solido sia eguale, maggiore, o minore di quattro angoli retti.*

Esprima XY il foglio del disegno; AB la comune sezione. D, H le projezioni del vertice dell' angolo solido; $EKCF$ la sezione, che il piano orizontale forma nelle facce. A tenore della ipotesi sia EKC l' angolo rientrante. Fig. 20

Per facilitare la costruzione, il piano verti-

cale esser deve perpendicolare ad EC, o sia che a questa è perpendicolare la comune sezione AB. Considerando la piramide della base ECF, si abbassi sul piano orizontale la faccia EDC, facendola muovere intorno il lato EC, e sia la vera faccia, espressa dal triangolo ELC; sarà l' angolo ELC il vero angolo corrispondente ad EDC. Lo stesso avendo eseguito per le altre due facce, otterremo gl'angoli veri spettanti ad EDF, FDC. Or questi due angoli veri uniti agli altri due delle due facce rientranti, dovendo la loro somma essere eguale a quattro angoli retti, affine di ritrovare il luogo geometrico cercato; perciò determinato l'angolo (che chiameremo T) compimento a quattro retti dai due veri appartenenti ad EDF, FDC, e diviso in due parti qualunque, si facci l'angolo QLE eguale ad una delle due parti, ed RLC all' altra. Ciò posto dando moto ai due piani QLE, RLC, il primo intorno LE, il secondo intorno LC, finchè le due LQ, RL combacino in una sola retta; per trovare la projezione orizontale di dette due rette nel loro combaciamento, si taglino LQ, LR tra loro eguali, e dai punti Q, R abbassate sulle rispettive rette di moto LE, LC le perpendicolari QS, RV, le quali tra loro s'incontrano in V; sarà questo un punto in projezione orizontale del combaciamento delle due QL, RL. Inoltre innalzata da V sopra VS la perpendicolare VM indefinita, e centro S intervallo SQ descritto un arco di cerchio, che t g'ia in M la VM, sarà VM l' altezza del punto V. Quindi abbassata da V sopra AB la perpendicolare, e tagliata $NO=VM$, dinoterà O la projezione verticale corrispondente ad V.

Di più facendo muovere intorno la EC il

triangolo ELC, unitamente al punto vero spettante ad V, finchè detto triangolo si metta nella sua naturale posizione, o sia che combaci colla faccia espressa in projezione orizontale dal triangolo EDC, il punto vero di V descrivendo un arco di cerchio, il quale nella projezione orizontale deve cadere nella retta Va perpendicolare a CG, e nella projezione verticale nell'arco di cerchio descritto col centro G, ed intervallo GO; per determinarlo, siccome dopo il moto la GN deve cadere in GH; così in questa tagliata $Gb = GN$, e dal punto b innalzata sopra GH la perpendicolare $bP = NO$, sarà P la projezione verticale del punto espresso da V, se da P si abbassa sopra AB la perpendicolare, che incontra in a la Va, esprimerà a la projezione orizontale.

Finalmente ritrovato l'incontro c col piano orizontale della retta, della quale le projezioni sono Da, HP, se si conducono le rette cE, cC, è manifesto, che essendo la somma dei quattro angoli veri corrispondenti a cDE, cDC, FDE, FDC eguale a quattro retti; sarà c un punto del luogo geometrico cercato.

Dividendo il sopradetto angolo T, compimento a quattro retti, in altre due parti diverse dalle prime due sopradette, e poi in altre, ed in altre, eseguendo la stessa costruzione, otterremo altri punti, quali uniti con una linea $cdef$, questa sarà in luogo geometrico cercato, perchè qualunque suo punto, come g, immaginandolo unito con D mediante una retta, risulta sempre la somma dei quattro angoli gDE, gDC, FDE, FDC eguale a quattro retti.

È però da notarsi; 1.°, che l'angolo EFC dovendo contenere, o essere contenuto nell' an-

golo rientrante *EKC*. Perciò non dobbiamo tener conto, se non del luogo geometrico *dge* compreso ne' prolungamenti dei lati *CF*, *EF*.

2.° Che se il punto *g* si determina nello spazio infinito mistilineo *idgel*, i detti quattro angoli sono maggiori di quattro retti, se poi nello spazio finito *dgeF*, o pure nell' altro indefinito *EFC* (supponendo prolungati all' infinito i lati *EF*, *FC*) la detta somma è minore di quattro angoli retti.

3.° La linea *dge*, a tenore che si accosta all' angolo *F*, divenendo più corta, in modo che giunta in detto angolo, risulta eguale al zero: Tale circostanza non solo dinota, che il punto *g* determinandosi nello spazio indefinito dell' angolo *iFl*, la somma dei quattro sudetti angoli è maggiore di quattro retti; e nell' altro dell' angolo indefinito *EFC*, ne è minore; ma eziandio, che la somma dei due angoli veri appartenenti ad *EDF*, *FDC* è eguale a due retti.

4. Finalmente, se il luogo geometrico incontra i lati *EF*, *FC*, o i loro prolungamenti a sinistra, accade l' opposto di ciò, che si è detto al qui sopra n.° 2.°

CAPO IV

Dei piani tangenti alle superficie curve.

110. Un piano può avere con una superficie curva tre posizioni. La prima si verifica, qualora non hanno tra loro neppure un punto comune, ancorchè tutt' e due si prolungano all' infinito. La seconda accade, se oltre di avere le due superficie uno o più punti, o pure una

linea comune, si trova la superficie curva tutta verso una stessa parte del piano, cioè a destra o a sinistra. Questa posizione è appunto quella, che dicesi *tangenziale*, o sia, che il piano è tangente alla superficie curva. La terza finalmente consiste nell' avere il piano non solo una linea comune colla superficie curva, ma eziandio nel trovarsi questa talmente disposta, che una sua porzione cade verso la parte destra, e la rimanente verso la sinistra del piano. Per tale particolare posizione, il piano dicesi *segante* rispetto alla superficie curva.

111. È da notarsi però, che la circostanza tangenziale si divide in due altre, cioè in quella detta *generale*, e nell' altra chiamata *particolare*; la prima ha luogo, quando il piano, e la superficie curva, prolungati, non si segano giammai: e la seconda allorchè succede l'opposto.

112. Premesse le sopradette distinzioni; è manifesto, che se pel punto di contatto di un piano con una superficie curva si fanno passare infiniti piani seganti le due superficie, ciascuno di essi formando due sezioni, delle quali quella col piano tangente è sempre linea retta, e l'altra colla superficie curva è ordinariamente una curva; siccome a questa, non meno che alla superficie curva è tangente in detto punto di contatto la prima sezione rettilinea; così potendosi sempre immaginare, e costruire una superficie tale, che le dette infinite tangenti, menate ad essa da un suo punto, si trovino, o no in un sol piano; possiamo perciò dire, che

Ad una superficie curva, non sempre si può menare un piano, che gli sia tangente in un determinato punto.

113. È facile ora, da quanto si è detto, trovare il modo, come conoscere, se ad una data superficie curva si può menare un piano tangente.

Questa soluzione si ottiene con determinare le sezioni, che formano (colla superficie curva) infiniti piani seganti, li quali passano per un punto in essa preso; indi da questo punto comune a tutte le sezioni menate le rispettive tangenti, e trovati gl' incontri di queste, col piano orizontale, o pure con qualunque altro, che si vorrà, se per tutti detti punti d' incontro vi passa una retta, si potrà menare il piano tangente, altrimenti accaderà l' opposto.

114. Questo metodo, che è il generale, riceve modificazione più facile, a tenore delle particolari generazioni, che si destinano alle superficie curve, come si esporrà in seguito.

115. Qualora poi siamo sicuri, che ad una data superficie curva si può menare un piano tangente, per determinarlo, basterà soltanto tirare due sole tangenti, perchè per due rette, che s' incontrano, passa sempre un piano.

116. Affine di render più chiaro, ciò che abbiamo detto al paragrafo 112., apporteremo per brevità l' esempio di una sola superficie curva, alla quale non si può menare un piano tangente.

Fig. 21 Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; il punto C, e la retta *E*D le projezioni di una prima retta perpendicolare al piano orizontale, ed *IH*, *GF* quelle di una seconda obbliqua al detto piano orizontale, la quale non si trova nello stesso piano colla prima, e che per facilitazione supporremo essere la sua projezione orizontale *IH* perpendicolare ad *AB*.

Se da due punti qualunque della seconda

retta, espressi in projezione orizontale da H, I, si suppongono abbassate sopra la prima due perpendicolari, venendo queste dinotate in projezione orizontale dalle HC, IC; segue, che facendo muovere il sistema delle quattro rette, composto dalle due date, e dalle due perpendicolari, intorno alla prima retta come asse; siccome ciascun punto della HI nel moto viene a descrivere una circonferenza di cerchio, del quale il centro si trova nell' asse, ed il suo piano è a questo perpendicolare; così la retta HI descriverà una superficie di rivoluzione regolare. Or qualunque sia la natura di questa superficie, venendo essa sempre generata dalla rivoluzione intorno all' asse della linea, che è sezione prodotta da un piano segante la superficie curva, il quale passa per l' asse. Perciò la presente superficie avrà una seconda generazione. Passiamo primieramente a determinare la natura di detta sezione.

Qualunque sia la direzione del piano segante, il quale passa per l' asse, risultando sempre la medesima sezione; perciò supporremo per facilità, che detto piano sia paralello a quello di projezione verticale; segue da tale ipotesi, che la projezione orizontale di questo piano non solo sarà espressa dalla retta KL paralella ad AB, ma ben anche in essa cader deve la projezione orizontale della sezione; non resta dunque a fare altro, che trovare la sua projezione verticale, cioè le projezioni verticali dei punti d' incontro delle circonferenze, che descrivono i punti della HI, col piano segante.

Per fare ciò, si rifletta, che i centri di questi cerchi cadendo in projezione orizontale nel solo punto C, ed i raggi essendo le rette, che uniscono il punto C con ciascuno di quelli della

retta HI; perciò determinato in questa un punto M, condotta la CM, e descritto col centro C ed intervallo CM l' arco MO, il punto O sarà la projezione orizzontale di un punto della curva di sezione. Per determinare ora la corrispondente projezione verticale; esprima NP la comune sezione del terzo piano coordinato, ed in questo la projezione della prima retta sia Lr, e della seconda PQ, abbassata dal punto M sopra NP una perpendicolare indefinita, la porzione RS essendo l' altezza del punto M, non meno che dell' altro O; perciò da questo punto tirata una retta indefinita perpendicolare ad AB, e tagliata $TV=RS$ sarà V la projezione verticale corrispondente ad O. Similmente operando per tutti gl' altri punti, che si determineranno nella HI, si otterranno tanti punti nella projezione verticale, i quali uniti con una linea, come abc; questa sarà la cercata projezione verticale della sezione.

Premessa la detta costruzione, si descrivano con i due raggi CM, CI le mezze circonferenze dMO, eIf indi tagliata $Cm=Cg$; abbassata su di AB la perpendicolare indefinita mn; fatta $sn=Lr$; condotta da n la np paralella ad AB; e tirate le altre linee, che si osservano nella figura, per la proprietà del cerchio abbiamo $Mg^2 : Ig^2 = dg \times gO : eg \times gf$ ma $Mg^2 : Ig^2 = Si^2 : lh^2 = ir^2 : hr^2 = Vo^2 : qp^2$; e $dg \times gO : eg \times gf = mO \times Og : mf \times fg = no \times ob : np \times pb$, sostituendo, otterremo $Vo^2 : qp^2 = no \times ob : np \times pb$. Or questa proporzione appartenendo alla Iperbole; perciò la curva di sezione è Iperbole, e la superficie curva, generata dalla retta appartenente ad HI, è della classe delle Iperboloidi. In conseguenza possiamo conchiudere, che.

La proposta superficie curva è quella di

un Iperboloide, la quale ha due generazioni, ed una di esse deve avere per generatrice una linea retta.

117. Passiamo ora ad esaminare se alla sopradetta superficie si possa menare un piano tangente.

Si dovrebbe, secondo che si è detto nel paragrafo 113., menare un numero infinito di tangenti alla superficie curva da un suo punto, trovare i loro incontri col piano orizzontale ec. Questa operazione in alcuni casi riuscendo molto lunga, bisogna trovarne un' altra.

Per avere un indirizzo da riuscire con facilità nella ricerca, conviene avvertire 1.° di dare a ciascun piano segante quella posizione, che formi nella superficie curva una sezione rettilinea, perchè questa confondendosi colla rispettiva tangente, non bisogna altra operazione per determinarla. 2.° Se ciò non è possibile, conviene, che le dette sezioni risultino circolari, per essere facilissimo il modo di menare ad una circonferenza una tangente. 3.° Se tal cosa neppure può accadere, è necessario, che i piani seganti siano perpendicolari ad uno dei due piani di projezione, acciò in questo le projezioni delle sezioni essendo linee rette, si possa risparmiare la fatiga di tracciare le curve di sezione. In 4.° ed ultimo luogo, supponendo essere la superficie curva generata da una linea retta; siccome pel punto determinato in detta superficie vi passa una sola posizione della generatrice; così facendo passare per questa il piano segante, e la generatrice confondendosi colla sezione, e colla corrispondente tangente; perciò il piano tangente deve sempre passare per una posizione della generatrice rettilinea. Inoltre supponendo per un momento

potersi menare alla superficie curva un piano tangente, ed essersi questo di già condotto, se le due superficie, cioè la curva, e la piana tangente, si fanno tagliare da due piani tra loro paralelli, li quali passano per due diversi punti della generatrice; le due sezioni col piano tangente dovendo essere, per la geometria solida, rette tra loro paralelle. Segue, che se le dette due tangenti non risultano paralelle, ciò è segno, che per la detta generatrice non può passare un piano tangente alla superficie curva.

Quanto veniamo di dire, ci somministra il modo, come facilmente risolvere il proposto problema.

Fig. 22 In fatti essendo C la projezione orizontale dell' asse; ed HI quella di una posizione della generatrice; in questa determinati due punti K, I, e descritte col centro C ed intervalli CK, CI due circonferenze LK, MI, queste saranno le projezioni orizontali delle sezioni di due piani orizontali seganti la superficie curva. Finalmente tirate dai punti K, I le tangenti KN, IO alle rispettive circonferenze; siccome la KI non passa pel centro C; così le due tangenti non essendo tra loro paralelle, si conchiude, che alla proposta superficie curva non si può menare un piano tangente.

Se la retta corrispondente ad HI incontrasse o pure fusse paralella a quella espressa dal punto C, risultando le due tangenti tra loro paralelle, si potrebbe menare il piano tangente; e siccome nel caso di concorrenza la superficie curva è conica, e nell' altro di paralellismo è cilindrica; così a queste due superficie, cioè a quelle a semplice curvatura si può sempre menare un piano tangente.

La superficie del sopradetto Iperboloide essendo benanche *Storta*; è facile dopo quello che abbiamo detto, conoscere che (generalmente parlando) alle superficie storte non si può menare un piano tangente. Si è detto, generalmente parlando, perchè tra queste superficie ve ne sono di quelle, alle quali per alcuni punti si può, e per altri non si può menare un piano tangente, una di tali superficie è quella del *Cono–Cuneo*.

È ora tempo fare l' applicazione, di quanto abbiamo detto in questo capitolo, circa il menare un piano tangente, a diverse superficie, affinchè, nella immaginazione dei Giovani principianti, resti la presente materia più chiaramente impressa. Per brevità considereremo soltanto tre specie di superficie, e sono la conica, la cilindrica, e la sferica; Or siccome per ciascuna di queste possono farsi diverse Ipotesi; così ci restringeremo a due, le quali pel cono, e pel cilindro sono le seguenti. 1.ª Menare un piano tangente, che passi per un dato punto esistente nella superficie. La 2.ª poi non differisce in altro dalla prima, se non che il punto non si trova nella superficie.

Riguardo poi alla superficie sferica; la prima Ipotesi è la stessa, e la seconda non avendo luogo, perchè il Problema risulta indeterminato, suppliremo perciò colla seguente, cioè; Per una data retta far passare un piano tangente alla superficie sferica.

PROBL. XVII.

118. *Per un punto esistente in una superficie conica far passare un piano a questa tangente*.

Affine di ottenere maggiore facilitazione sup-

porremo trovarsi la base del cono nel piano orizontale.

Fig. 23 Sia XY il foglio del disegno AB la comune sezione; IKL la base del cono, la quale per trovarsi nel piano orizontale, la sua projezione verticale deve cadere nella AB; D, G esprimano le projezioni del vertice; e G sia la projezione orizontale del dato punto.

Si noti, che non è necessario dare la projezione verticale corrispondente al punto G, perchè da questa resta determinata in conseguenza, col doversi ritrovare nel comune incontro della perpendicolare al piano orizontale, innalzata da G, colla superficie conica.

Prima di esporre la soluzione, conviene esaminare se il punto G sia bendato. Per fare ciò possono darsi due casi; 1.° che il punto G si trova fuori la base IKL; 2.° dentro di essa.

Nel 1.° caso, tirando dal punto D, projezione orizontale del vertice del cono, due tangenti estreme DE, DF alla curva IKL, siccome vengono queste a dinotare le projezioni orizontali di due piani verticali passanti pel vertice, e trai quali viene ad essere contenuta la superficie conica: così è chiaro, che se il punto G si trova fuori dell' angolo EDF, sarà mal dato, se poi dentro ben dato.

Nel 2.° poi, in qualunque sito esiste il punto G: sempre sarà ben dato.

Volendo inoltre trovare la projezione verticale corrispondente a G, non vi è dubbio, che condotta la retta DGI, la quale passa pel vertice D, e pel punto G, dinoterà DI la projezione orizontale del lato del cono, che passa pel punto dato. Or la projezione verticale di detto lato dovendo passare per quelle spettanti a due

punti, *D* ed *I*; siccome *C* è quella di *D*, e l' altra di *I* viene espressa da *H*, incontro colla comune sezione della perpendicolare abbassata da *I* sopra *AB*; così congiunta la *CH*, sarà questa la projezione verticale del proposto lato. Di più il punto *G* trovandosi nella D*I*, la sua projezione verticale cader deve ben anche nella *CH*. Perciò abbassata sopra *AB* dal punto *G*, una perpendicolare indefinita, la quale la incontra in M, sarà questo la projezione verticale cercata corrispondente a *G*:

Ad eseguire ora la soluzione del proposto Problema, nel quale la superficie curva del cono è una di quelle, alle quali siamo sicuri potersi menare un piano tangente, non abbiamo bisogno di altro, che far passare pel dato punto due diverse tangenti.

Per tale oggetto dovendo far tagliare la superficie conica da due piani, e convenendo, che uno di essi passi pel vertice, e pel punto dato, acciò la sezione risulti linea retta; ed esprima ben anche una delle due tangenti; perciò questa sarà dinotata dal lato D*GI*. La seconda poi, (la quale dovrebbe passare nel punto *G*) a motivo che la prima tangente combacia colla superficie curva, potendosi sempre menare da qualunque punto della D*I*, come da *I*; segue, che se il secondo piano segante sia quello di projezione orizzontale; siccome la sezione colla superficie conica è la curva *IKL* sua base; così alla detta curva condotta dal punto *I* la tangente *IN*. Perciò il piano tangente è quello, che passa per *IN*, e per la retta vera corrispondente a D*I*.

Il piano tangente ritrovato volendosi esprimere con due tracce, avendone ottenuta una so-

la, cioè *IN* che è traccia orizzontale; conviene trovare solamente la traccia verticale. Si tiri perciò dal punto D projezione orizzontale del vertice del cono una paralella alla *IN* dinotata da *DO*, questa essendo la projezione orizzontale di una retta orizzontale esistente nel piano tangente, la sua projezione verticale verrà dinotata dalla retta *CP* paralella ad *AB*, condotta dal punto *C* projezione verticale del vertice del cono. Se da *O* s'innalza sopra *AB* la perpendicolare, che incontra la *CP* nel punto *Q*, condotta la *NQR*, esprimerà questa la traccia verticale del piano tangente.

Se la *IN* non incontra la *AB* dentro il foglio del disegno; conviene menare da due punti della *DI* due paralelle ad *IN*, e per ogn'una facendo la stessa costruzione eseguita per la *DO*, si avranno due punti nel piano verticale, i quali uniti con una retta; sarà questa la traccia verticale cercata; si noti, che se la *IN* è tangente generale alla curva *IKL*, il piano tangente sarà generale, altrimenti si otterrà quello particolare.

PROBL. XVIII.

119. *Per un punto non esistente nella superficie conica far passare un piano ad essa tangente.*

Fig. 24. Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; *GHI* la base del cono esistente nel piano orizzontale *C*, D le projezioni del vertice; ed *E*, *F* quelle del punto dato, le quali devono essere due, perchè il punto non deve trovarsi nella superficie conica.

Il punto potendo avere tale posizione, che sia compreso nello spazio concavo del dato cono, o del suo opposto al vertice, o pure al di fuori

di essi ; siccome nel primo , e secondo caso il Problema è impossibile ; così conviene prima di ogn' altro esaminare, se la posizione del punto è ben data . S' immagini per ciò essere unito il dato punto col vertice mediante una retta, ed essere questa prolungata, finchè incontra il piano orizontale , nel quale esiste la base del cono ; è cosa da se chiara , che, se il punto d' incontro si ritrova dentro il perimetro della base, tale circostanza dinotando, che il punto dato esiste nello spazio concavo del cono , o del suo al vertice opposto, il problema sarà impossibile , altrimenti solubile .

Supposto fatta la detta costruzione, ed essersi ritrovato il Problema possibile , passiamo alla soluzione .

Essendo K l' incontro col piano orizontale della retta congiungente il punto dato col vertice, questa retta dovendosi trovare nel piano tangente, il quale deve sempre passare pel punto dato , e pel vertice ; avremo determinata una delle due rette, la seconda poi ottenendosi (per quello , che si è detto nel qui avanti sciolto problema) col tirare dal punto K alla curva GHI, la tangente KGL; perciò il piano tangente sarà quello, che passa per la retta vera spettante alla CK, e per l' altra KL .

Se si vorrà determinare la traccia verticale , si eseguirà la costruzione spiegata nel Problema precedente .

E da notarsi finalmente , che questo problema può avere tante soluzioni , quante sono le tangenti, che dal punto K si possono tirare alla curva GHI , ed i piani tangenti saranno generali, o particolari, secondo che sono pure tali le tangenti .

120. *Per un punto dato nella superficie curva di un cilindro far passare un piano tangente alla medesima.*

Fig 25 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CDE la base del cilindro, la quale supponiamo che si trova nel piano orizontale; DF, TG le projezioni della generatrice; ed I la projezione orizontale del dato punto.

Non è necessario dare la projezione verticale del punto, per la stessa ragione detta riguardo al cono.

Per esaminare se il punto è ben dato, basta tirare alla curva della base le due tangenti NO, QP paralelle a DF, perchè se il punto I si trova fra queste due paralelle, sarà ben dato, altrimenti accaderà l' opposto.

Se si vuole trovare la projezione verticale corrispondente al punto I, per esso si conduca alla FD la paralella HIC, questa rappresentando la projezione orizontale del lato, che passa per I, se dal punto C si abbassa la perpendicolare CL sopra di AB, e da L si tira LM paralella a GT; sarà LM la projezione verticale corrispondente ad HC, Finalmente abbassata sopra AB dal punto I la perpendicolare indefinita, che incontra in K la LM, dinoterà K la projezione verticale appartenente ad I.

Avendo presente ciò che si è detto pel cono; sarà cosa molto evidente, che la retta HC, lato del cilindro, è una delle due rette, che determinano il piano tangente, e l' altra viene espressa dalla tangente RCS, menata alla curva CDE dal punto C. Perciò il piano tangente cercato, è

quello, che passa per la RS, e per la retta vera appartenente ad HC.

Se si voglia trovare la traccia verticale, si eseguirà la costruzione spiegata pel cono.

Se la retta RS è tangente generale, sarà pure tale il piano tangente, altrimenti si otterrà il particolare.

PROBL. XX.

121. *Per un punto non esistente nella superficie curva cilindrica far passare un piano, che sia a questa tangente.*

Esprima XY il foglio del disegno AB la comune sezione; ICM la base del cilindro esistente nel piano orizzontale; CD; EF le projezioni della generatrice; ed H, G quelle del punto dato. Fig. 14

Per conoscere se il punto è ben dato, da G si tiri KL paralella a CD, e da H l'altra HN paralella ad EF; innalzata da N sopra AB la perpendicolare NK; sarà K il punto d' incontro col piano orizzontale della paralella, condotta alla generatrice dal punto vero di G; se il punto K cade dentro la base ICM, il problema sarà insolubile, perchè il detto punto si trova nello spazio concavo del cilindro, se fuori, sarà ben dato, come accade nella presente figura.

Mediante questa costruzione è manifesto, che la retta LK sarà una delle due, che determinano il piano tangente, e l' altra verrà espressa dalla tangente KI, condotta alla curva della base dal punto K.

Questo Problèma avrà tante soluzioni, quante sono le tangenti, che si possono menare alla curva della base, ed i piani tangenti saranno gene-

rali, o particolari, secondo che sono tali le tangenti.

Per trovare la traccia verticale del piano tangente, si esegua quanto si è detto pel cono.

PROBL. XXI.

122. *Menare un piano tangente ad una superficie sferica, il quale passi per un punto in essa dato.*

Fig. 27. Sia *XY* il foglio del disegno; *D* la projezione orizontale del centro; ed *LMK* quella del cerchio massimo parallello al piano orizontale.

Il piano verticale di projezione potendo avere infinite posizioni, conviene, per facilità della soluzione, preferir quello, che è parallello alla retta congiungente il punto dato col centro, o sia che la comune sezione sia paralella alla projezione orizontale di detta retta; quindi essendo *E* la projezione orizontale del punto dato, la comune sezione *AB* esser deve paralella ad *ED*.

Ciò posto sia *C* la projezione verticale del centro della sfera, ed *FH* quella del cerchio massimo parallelo al piano verticale.

Non è necessario dare la projeziono verticale del punto, perchè, dovendosi trovare nell' incontro della perpendicolare, innalzata dal punto *E* al piano orizontale, colla superficie sferica, risulta in conseguenza della projezione orizontale.

Per trovarla, siccome esister deve nella circonferenza del cerchio massimo espressa in projezione orizontale dalla retta *IK*, la quale in projezione verticale viene dinotata dalla circonferenza *FH*; così abbassata dal punto *E* sopra *AB* la perpendicolare, incontrando questa la circonferenza *FH* nei due punti *F*, *L*, supporremo,

chè uno di essi come F sia la projezione verticale corrispondente ad E.

Per esporre ora la soluzione; non potendo un piano, segante la superficie sferica, formare, che sezioni circolari, ed essendo noi sicuri, che alla data superficie si può menare un piano tangente; sarà sufficiente per determinarlo, ritrovare le projezioni di due tangenti alla superficie, le quali passano pel punto dato.

Ad ottener ciò col minimo incomodo possibile, conviene dare al primo piano segante la posizione paralella al piano verticale di projezione, acciò la sezione la quale è un cerchio massimo sia rappresentata nel piano orizontale dalla retta IK, e la projezione verticale del cerchio $FLIH$.

Or la tangente dovendosi trovare nel piano segante, perciò la sua projezione orizontale deve cadere nella retta IK, e la projezione verticale deve essere la tangente menata alla circonferenza $FLIH$ dal punto F; condottala dunque; le projezioni della prima tangente saranno, FN, GK.

Se al secondo piano segante si dà la posizione orizontale; la sezione circolare avendo per raggio la ED, e per centro D, la projezione orizontale della tangente al punto E sarà la retta PEO perpendicolare ad IK, e per essere PO perpendicolare ad AB la projezione verticale verrà espressa dal punto F. Colla detta costruzione restando determinate le due tangenti, lo sarà ben anche il piano cercato.

Se si vogliono esprimere le tracce del trovato piano; siccome esso è perpendicolare al piano verticale; così la FN esprimerà la traccia verticale, e dall'incontro N colla comune sezione innalzata a questa la perpendicolare NG, tale retta dinoterà la traccia orizontale.

123. *Per una retta far passare un piano tangente alla superficie sferica.*

La data retta potendo avere tre posizioni colla superficie sferica, cioè di essergli segante, tangente, o di non incontrarla; nel primo caso il Problema è insolubile, nel secondo semplicemente solubile, e nel terzo doppiamente solubile.

Per conoscere dalle projezioni, in quale dei Fig.18 tre casi si trovano i dati. Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; C, D le projezioni del centro; EF, GH quelle dei cerchi massimi paralelli ai piani di projezione.

È manifesto, che se le projezioni della retta (supposta prolungata all' infinito) 1.° non incontrano i rispettivi cerchi massimi projettati, o pure una è segante, e l' altra prolungata non incontra la corrispondente circonferenza, la data retta non sarà segante la superficie sferica. 2.° Se tutt' e due sono tangenti alle rispettive circonferenze, ed i punti di contatto corrispondono ad un sol punto della superficie sferica; la retta data le sarà tangente, in caso contrario non l' incontrerà.

3.° Se una è tangente, e l' altra segante le rispettive circonferenze; allorchè accade, che questa segante passa per un punto, il quale è projezione dell' altro di contatto, la retta data sarà tangente, altrimenti non incontrerà la superficie sferica.

4.° Finalmente supponendosi, che le due projezioni della retta siano seganti le corrispondenti circonferenze; siccome in questa ipotesi può la retta data non incontrare, o essere tangente, o pure segante la superficie sferica; così non essen-

do facile determinare all' istante la vera posizione. Conviene fare la seguente particolare costruzione.

Esprimono *IK*, *LM* le projezioni della data retta, tutt' e due seganti le omologhe circonferenze *EF*, *GH*, colla circostanza però, che la *IK* sia paralella ad *AB* (lo che sempre si può eseguire). Immaginando passare per *IK* un piano perpendicolare a quello di projezione orizontale, e producendosi nella superficie sferica una sezione, che è la circonferenza del cerchio, il quale ha per diametro la retta *NF*, essendo questo cerchio paralello al piano verticale, si otterrà la projezione in questo, descrivendo col centro *D*, ed intervallo la metà di *NF* il cerchio *OP*. Ciò fatto, non vi è dubbio, che se la retta *LM* non incontra, o pure è tangente, o segante col detto cerchio; sarà ben anche tale la vera retta colla superficie sferica.

Supponendo ora, dopo fatto il sudetto esame, la data retta non aver punto alcuno comune colla superficie sferica, ed in tale caso essendo il problema, sopra enunciato, possibile; conviene perciò spiegare la soluzione.

Intanto è da notarsi, che la soluzione potendo essere più o meno facile; dipendente dalle posizioni, che la data retta può avere col diametro verticale, o sia asse di rivoluzione della sfera; segue che, per essere queste posizioni al numero di quattro, 1. Quando la retta e l' asse sono tra loro concorrenti, 2. Paralelli. 3. Se trovandosi in piani diversi, per una può passare un piano perpendicolare all' altra, e 4. qualora esistendo in piani diversi, detto piano non può passarvi. Bisogna esporre per ciascuna di esse la particolare soluzione colla massima chiarezza possibile.

124. Essendo la data retta concorrente coll' asse, se dal punto d' incontro si conduce alla curva generatrice della sfera una tangente, e si fanno girare con una intera rivoluzione intorno all' asse queste due linee, cioè la tangente, e la curva generatrice, che è la mezza circonferenza, la prima descriverà la superficie curva di un Cono, la quale sarà tangente all' altra sferica, formata dalla generatrice curva. Ciò eseguito, se alla superficie curva conica si conduce un piano tangente, il quale passa per la data retta, o pure per un suo punto, è manifesto, che detto piano sarà ben anche tangente alla superficie sferica. Si tralascia la costruzione, perchè facilissima, e dipendente da quello, che si è detto riguardo al cono nel paragrafo 118.

Potendosi per la data retta, o per un suo punto, far passare due piani tangenti alla sfera; perciò la soluzione sarà doppia.

2.ª IPOTESI.

125. Supponendo essere la data retta parallella all' asse verticale della sfera. Menata alla curva generatrice una tangente paralella all' asse ed eseguito il moto di rivoluzione, come nel precedente paragrafo, la tangente, in vece di una superficie curva conica, descriverà quella di un cilindro. Segue perciò, che per risolvere il problema, non si ha da fare altro, se non menare per la data retta, o per un suo punto, un piano tangente alla superficie cilindrica; e siccome sappiamo eseguire questa costruzione, mediante il paragrafo 120; così per brevità la trala-

sceremo. Si noti soltanto, che la soluzione è doppia.

3.ª IPOTESI.

126. Sia *XY* il foglio del disegno, *AB* la comune sezione; *C*, *D* le projezioni del centro della sfera; *IK*, e *D* quelle dell' asse verticale; *LM*, *NO* le projezioni dei cerchi massimi paralelli ai rispettivi piani coordinati. Finalmente esprimano *EF*, *GH* le altre della data retta, la quale per facilità supporremo essere paralella al piano verticale; siccome è ben anche paralella al piano orizontale, perchè l' asse è verticale: così le due sue projezioni sono paralelle ad *AB*. Fig. 15

S' immagini condotto per la data retta il piano tangente, se pel punto di contatto si fa passare un piano orizontale segante il piano tangente, e la sfera, risultandone due sezioni, rettilinea la prima, ma paralella alla data retta, e circolare la seconda, tra' loro tangenti; ne deriva; che dal punto di contatto tirato al centro del cerchio di sezione il raggio, ed innalzata dal punto di contatto sopra la tangente al cerchio una perpendicolare; la quale esista nel piano tangente. Sarà quello che passa pel raggio, e la detta perpendicolare non solo perpendicolare alla tangente, ma ben anche alla data retta; tale circostanza, la quale fa, che questo piano sia non solo verticale, ma ben anche passi pel centro del cerchio di sezione, e quindi per l' asse ci somministra il modo, come risolvere il proposto Problema:

Infatti dal punto *D*, projezione orizontale dell' asse, abbassata sopra *EF* la perpendicolare *DP*, dinotando questa la projezione orizontale del

piano perpendicolare alla data retta, il quale passa per l'asse; in essa perpendicolare trovar si deve la projezione orizontale del puuto di contatto. Per rinvenirlo; siccome il piano verticale per *DP* incontra l'altro piano tangente in una retta, la quale parte dal punto corrispondente a *P*, ed è tangente al cerchio di sezione, prodotto dallo stesso piano per *DP*; così nella *GH* tagliata *TQ=DP*, dal punto *Q* condotta alla circonferenza *ILKM* la tangente *QL*, e da *L* abbassata la perpendicolare *LR* sopra l'asse *IK*; se centro *D* intervallo un raggio eguale ad *LR* si descrive un arco di cerchio, che taglia in *S* la *DP*. Saranno *S*, *R* le projezioni del punto di contatto dimandato.

Si noti, che dal punto *Q* potendosi menare al cerchio due tangenti. Perciò questo Problema ha doppia soluzione.

4.ª IPOTESI.

127. L'asse essendo verticale, la data retta nella presente ipotesi deve essere inclinata al piano orizontale. Affinchè però la costruzione riesca facile, situeremo la detta retta talmente (lochè sempre si può eseguire), che oltre, come si è qui avanti detto, di essere concorrente col piano orizontale, sia paralella all'altro verticale. Perciò Fig. 31 dinoti *XY* il foglio del disegno; *AB* la commune sezione; *C*, *D* le projezioni del centro della sfera; *EF*, *GH* quelle dei cerchi massimi paralelli ai rispettivi piani coordinati; *IK*, *QM* le projezioni della data retta, delle quali sia *IK* paralella ad *AB*.

Si tirano al cerchio *EF* esistente nel piano verticale le due tangenti *LN*, *OP* paralelle alla

QM, dette tangenti esprimeranno le projezioni verticali di due lati del cilindro, paralelli alla data retta, e circoscritto alla sfera; se si uniscono i due punti di contatto *E*, *F* con una retta, dinoterà *EF* la projezione verticale di un cerchio massimo della sfera, il quale è la base del detto cilindro. Premessa tale costruzione, se per la data retta, o pure per un suo punto si fa passare un piano tangente alla superficie cilindrica, questo risultando ben anche tangente alla sfera si sarà perciò risoluto il Problema. Quantunque; possiamo rimettere il resto della costruzione al paragrafo 120; per maggiore intelligenza però dei principianti, apporteremo la costruzione.

Dovendosi trovare soltanto il punto di contatto del piano tangente colla superficie sferica; siccome detto punto nella projezione verticale deve cadere nella *EF*, e precisamente nel contatto della tangente al detto cerchio, menata dal punto di sezione (dinotato da *R*) del piano prolungato del cerchio colla data retta; così il tutto cadendo nella *EF*, è necessario, per trovare il detto punto di contatto, abbassare sul piano orizzontale quello del soprannominato cerchio.

Questo piano essendo perpendicolare a quello di projezione verticale; segue, che se si prolunga *EF* sino ad *AB*, e dall' incontro *S* s' innalza sopra *AB*, ma nel piano orizontale, la perpendicolare *ST*; esprimeranno *ES*, *ST* le tracce. Or facendo muovere questo piano intorno *ST*, finchè combaci col piano orizontale, il centro *C* del cerchio, espresso da *EF*, descrivendo un arco di cerchio, rappresentato nel piano verticale dall' arco *CV* (il quale ha per centro *S*, e per raggio *SC*), e nel piano orizontale dalla retta

DZ paralella ad AB; perciò innalzando da V sopra AB la perpendicolare VZ, si otterrà il punto Z, se centro questo, ed intervallo un raggio eguale a CF, si descrive il cerchio ab, dinoterà questo quello corrispondente ad EF abbassato sul piano orizontale.

Similmente centro S intervallo SR descritto un altro arco Rc, ed innalzata dal punto c sopra AB la perpendicolare cd, che incontra il prolungamento di IK in d, rappresenterà questo punto la posizione di quello corrispondente ad R, nel detto piano abbassato sull' orizontale; segue da ciò, che condotta dal punto d alla circonferenza ab la tangente db; sarà b il punto di contatto. Finalmente dal punto b abbassata sopra AB la perpendicolare be, e centro S intervallo Se, descritto un arco di cerchio, che incontra in f la EF, se da f si abbassa sopra AB una perpendicolare, e da b si conduce una paralella ad AB, la quale s' incontra colla perpendicolare in g; saranno f, g le projezioni del punto di contatto del piano tangente cercato colla superficie sferica.

Si noti, che dal punto d potendosi menare alla circonferenza ab due tangenti, il Problema per tale circostanza ha una doppia soluzione.

Abbiamo finora menato il piano tangente ad una sola superficie curva, non sarà cosa disconveniente apportare una soluzione, nella quale considereremo, che siano tre le superficie, e di natura sferica, alle quali bisogna menare un piano tangente.

128. *Date tre superficie sferiche, menar loro un piano tangente.*

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; C, D, E; Q, R, S le projezioni dei tre centri delle sfere; ed i rispettivi mezzi cerchi massimi generatori venghino dinotati da FGH, IKL, MNO. Fig. 18

Uniti con rette li tre centri, se da uno di essi, come da quello espresso in projezione verticale da C, si conduce la retta CV paralella ad AB, e si suppone essere la traccia, o pure la projezione verticale di un piano orizontale, restando da questo tagliata la DE, o il suo prolungamento in P, se dal detto incontro si abbassa sopra AB la perpendicolare, che incontra in T la RS, corrispondente a DE; condotta la QT, dinoterà questa la projezione orizontale di una retta orizontale esistente nel piano dei tre centri.

Or se si elegge, per facilitare la soluzione, un altro piano verticale di projezione, e propriamente quello perpendicolare a QT (si noti, che per non complicare molto la figura se n'è fatta una seconda, nella quale le projezioni orizontali sono le stesse, e le verticali si sono trasportate nel nuovo piano), in questo li tre centri d, e, e, trovandosi in una retta; se il piano dei tre centri si fa girare intorno la retta qt, finchè diviene orizontale; siccome nel piano verticale la retta de deve acquistare la posizione fg paralella ad ab, ed essere $cf=cd$, e $cg=ce$; così abbassando dai punti f, g sopra ab le perpendicolari e dai punti r, s le altre indefinite sopra qt, le quali si uniscono colle corrispondenti delle due prime nei punti h, i, congiunti li tre punti h, q, i

con rette, il triangolo *hqi* dinoterà la projezione orizontale, non meno che la vera grandezza del triangolo, del quale i vertici degli angoli sono i tre centri delle sfere, se con essi tre punti come centri, e con i rispettivi raggi si descrivono le tre circonferenze, che si osservano nella figura, queste dinoteranno quelle dei tre cerchi massimi esistenti nel piano dei tre centri.

Or immaginando esser condotto il piano tangente alle tre sfere, se i punti di contatto si uniscono con rette, essendo non solo ciascuna di esse tangente a due sfere, ma ben anche due a due tangenti in un punto alla rispettiva sfera, ed i raggi dei punti di contatto, perpendicolari tanto a detta tangente, quanto al piano tangente, saranno perciò tra loro paralelli: ritrovandosi ora in un piano questi due raggi, la tangente, e la congiungente i centri delle due sfere; segue, che ai cerchi dei centri *q*, *i* tirata la tangente esterna *lm*, e condotti li raggi *lq*, *mi*, se il trapezio *qlmi* si fa girare intorno la *qi*; siccome il punto *l* descrive una circonferenza di cerchio, la quale si trova nella superficie sferica del centro *q*, ed è rappresentata nel piano orizontale dei tre centri, dalla retta *lo*, menata perpendicolarmente ad *iq*; così il punto di contatto deve cadere nella *lo*: Similmente ai due cerchi dei centri *q*, *h* menata la tangente esterna *np*, e da *n* abbassata sopra *qh* la perpendicolare *nz*, dovendosi ben anche in questa trovare il detto punto di contatto, perciò sarà dinotato da *j* nella projezione orizontale, l' altezza poi di questo punto essendo la mezza ordinata all' ascissa *lj* del cerchio, del quale il diametro è *lo*, ritrovatala (lo che si eseguc facilmente) ed abbassata da *j* sopra *ab* la perpendicolare indefinita !, ed in essa tagliata *xu* eguale alla detta mezza ordinata; sarà *u* la projezione

verticale del punto di contatto del piano tangente cercato colla sfera del centro q.

La stessa costruzione eseguendo per le altre due sfere, si saranno ritrovate le projezioni degl' altri due punti di contatto.

Le ritrovate projezioni appartenendo al piano dei tre punti, qualora è orizontale; siccome tale posizione non sempre si verifica, come nel presente caso, nel quale detto piano, espresso dalla retta de, è inclinato al piano orizontale; così per determinarle in riguardo alla detta de, si dia moto alla fg, intorno al punto c, finchè giunga in de; in questa posizione il punto u dovendo avere altra situazione, per rinvenirla, si tagli nella ce la $cy=cx$, e dal punto y innalzata sopra ce la perpendicolare $yk=xu$; sarà k la vera projezione verticale del punto di contatto del piano tangente colla sfera del centro q. La projezione orizontale poi si ottiene, coll'abbassare dal punto k sopra ab la perpendicolare indefinita, e dal punto j un'altra sopra di qt, queste due perpendicolari incontrandosi tra loro, il punto di sezione sarà la projezione orizontale corrispondente a k. Lo stesso eseguendo per le altre due sfere, si sarà sciolto il Problema.

Se le projezioni dei punti di contatto si volessero rappresentare nella prima figura, l'esecuzione sarà facilissima, giacchè le projezioni orizontali dei tre centri, e quindi dei tre punti di contatto essendo le stesse, o sia avendo la stessa posizione colla QT di quella, che si trovano avere colla qt, supposto fatto questo trasporto; siccome, in riguardo alle projezioni verticali, le altezze dei tre punti di contatto sono le medesime qualunque sia il piano di projezione vertica-

le; così segue, che dai punti di projezione orizzontale abbassate sopra AB le perpendicolari, ed in queste tagliate le altezze, a partire dalla comune sezione, rispettivamente eguali a quelle determinate nella seconda figura, resterà il problema completamente risoluto. Si noti finalmente, che a ciascuna combinazione binaria dei tre cerchi, potendosi menare due tangenti esterne, e due altre interne; è cosa facilissima a comprendersi, che le soluzioni sono al numero di otto. La 1.ª quando il piano tangente si trova nella parte superiore delle tre sfere. La 2.ª nella parte inferiore. La 3.ª Qualora passa per la parte superiore delle due sfere dei centri Q, R, e per la parte inferiore della terza S. La 4.ª Allorchè passa per la parte inferiore delle prime due qui avanti dette, e per la superiore della terza. La 5.ª e 6.ª allorchè le prime due sfere sono R, S, e la terza Q. Finalmente si ottengono la 7.ª ed 8.ª considerando essere le prime due sfere Q, ed S, ed R la terza.

La costruzione, per ciascuna delle otto qui avanti accennate soluzioni, essendo consimile a quella da noi sopra spiegata; ci asteniamo per brevità di ripeterla, potendo qualunque persona da se stessa, e per esercizio eseguirla.

Quantunque l' oggetto propostoci in questo capitolo è stato di menare un piano tangente ad una superficie curva; nulla dimeno però non sarà cosa disdicevole apportare il solo seguente esempio, mediante il quale, si mostri il modo, come trovare la posizione di una superficie curva, tangente ad altre superficie curve.

129. *Date quattro superficie sferiche tra loro disuguali, trovarne una quinta, che sia tangente alla date.*

Per rendere semplice la soluzione, potendo, qualunque sia la posizione delle quattro sfere, ridurla sempre ad un' altra (mediante un movimento a tutte uniforme), nella quale tre centri di esse, qualunque siano, esistano nel piano orizontale, e l' altro verticale sia perpendicolare ad una delle tre rette, che uniscono i tre detti centri; faremo perciò uso di questa posizione.

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; C, D, E i centri (esistenti nel piano orizontale) appartenenti a tre sfere, e dalle quali li due C, D si trovano in una retta perpendicolare ad AB; dinotino H, F le projezioni del centro della quarta sfera; finalmente DK, CM, EL, HN siano i raggi delle date sfere. Fig. 32

L' enunciazione del problema essendo espressa in una maniera generale, possono le soluzioni essere moltissime. Infatti la quinta superficie sferica potendosi supporre, che sia tangente alle quattro date 1.° Internamente a queste 2.° Esternamente. 3.° Esternamente a quella del centro D, ed internamente alle altre tre. 4.° la posizione opposta, e queste due ultime ipotesi applicando, non solo a ciascuna delle altre sfere, ma ben anche ad ogni combinazione binaria delle sfere date, considerando la circostanza tangenziale esterna ed interna, ci daranno tutte le altre ipotesi, le quali passiamo sotto silenzio, perchè si possono facilmente distinguere da chi-

unque vorrà numerarle. Intanto dette varie ipotesi somministrando il motivo di tante soluzioni. Perciò, in grazia delle brevità, ne daremo una sola appartenente alla ipotesi, colla quale si dimanda, che la quinta sfera sia internamente tangente alle quattro date. In fine additeremo con poche parole la differenza, la quale deve passare tra la presente soluzione, e qualunque delle altre.

Per la chiarezza di ciò, che dovremo dire, non considereremo per ora la sfera del centro corrispondente ad *F*, ma supporremo, doversi menare una quarta sfera tangente interiormente alle tre dei centri *C*, *D*, *E*. Questo problema essendo indeterminato, perchè infinite sfere possono soddisfare alla espressata condizione; perciò il luogo geometrico della soluzione non potrà essere un punto, ma bensì una linea. Per descriverla, immaginiamo, che la quarta sfera tangente alle tre dei centri C, *D*, *E*, una tra il numero infinito, abbia un determinato raggio; mediante questa supposizione, se il centro della quarta sfera, e gl' altri due *D*, *E* si uniscono con rette, ottenendosi un triangolo, del quale la base è la *DE*, il lato, che parte da *D*, è eguale a *DK* più il raggio della quarta sfera, e l' altro lato, che appartiene ad *E*, eguaglia la somma di *EL* e del raggio della detta quarta sfera; perciò descritto nel piano orizontale, e sopra *DE* il cennato triangolo dinotato da *DOE*; è chiaro, che questo facendolo girare intorno la *DE*, il punto *O* descriverà un arco di cerchio, il quale nella projezione orizontale cader deve nella perpendicolare *OR* abbassata dal punto *O* sopra *DE*. Inoltre se il centro della quarta sfera si unisce con ogn' uno de' due *D*, *C* mediante linee rette, si

otterrà un' altro triangolo, che, abbassato sul piano orizontale, è dinotato da DQC; e del quale la base DC è la congiungente i centri D, C, il lato DQ è eguale a DO, e l'altro QC ha per lunghezza la somma dei raggi della quarta sfera, e dell' altra del centro C. Facendo ora benanche girare detto triangolo intorno la DC, il vertice Q descriverà un'arco di cerchio, il quale nella projezione orizontale trovar si deve nella QR abbassata perpendicolarmente sopra la DC. Segue da ciò, che nel moto dei due triangoli DOE, DQC le due rette DO, DQ giungendo ad una posizione, nella quale combaciar devono; in questo stato i due punti Q, O formar ne devono un solo, che sarà la vera posizione del centro della quarta sfera tangente interiormente alle tre date, le quali hanno per centri C, D, E; quindi l'incontro R delle due perpendicolari OR, QR esprimerà la projezione orizontale del centro della quarta sfera. Per ritrovare la sua projezione verticale, si abbassi dal punto R sopra AB la perpendicolare indefinita, e tagliata in AB la $GS=QV$, se centro G, intervallo GS si descrive un arco di cerchio, che incontra in T la detta perpendicolare; sarà T la projezione verticale dimandata. Si noti, che la perpendicolare RT incontrando la circonferenza del raggio GS in due punti, uno che è T, e l'altro al di sotto di AB, ciò dinota, che questo problema ha due soluzioni, noi, per non complicare la figura, abbiamo tenuto conto del solo punto T, ma ciò che appartiene a questo, spetta benanche all'altro.

Finalmente dando diverse lunghezze al raggio della quarta sfera, ed eseguendo per ciascuna una costruzione simile alla spiegata, avremo

tanti punti in projezione orizontale, e verticale; i primi uniti con una linea, ed i secondi con un' altra, queste due curve a rami infiniti ci dinoteranno le projezioni del luogo geometrico, il quale dà la soluzione del proposto problema indeterminato. Si rifletta 1.°, che la curva ritrovata, nel passare dalla parte superiore alla inferiore del piano orizontale, dovendolo incontrare in un punto, questo sarà il centro di una sfera tangente interiormente alle tre date, che gode la proprietà di essere la minima tra tutte le altre di numero infinito.

2.° Se si volesse, che la quarta sfera sia tangente esteriormente alle tre date, la costruzione sarà la stessa, colla sola variazione, che ciascun lato dei due triangoli DOE, DQC invece di farsi eguale alla somma del raggio della quarta, e dell' altro della corrispondente data sfera, conviene che sia eguale alla loro differenza. Se poi si bramasse, che la quarta sfera risulti tangente esteriormente alla sfera del centro D, ed interiormente alle altre due; in questo caso là DO (che è eguale a DQ) dev' essere eguale alla differenza del raggio della quarta sfera, e di DK, raggio della sfera del centro D, la OE eguale alla somma di EL e del raggio della quarta sfera, e QC eguale alla somma di CM, e del raggio della quarta sfera. Con questo criterio, costruendo i detti triangoli corrispondenti a ciascuna delle altre ipotesi, che si possono fare, si risolverà il problema.

Quanto finora abbiamo esposto, ci porge la facile maniera, come determinare la quinta sfera tangente alle quattro date. Infatti colla descrizione del già ritrovato luogo geometrico, tutti li punti, che in esso si possono immaginare, essen-

do i centri delle infinite sfere tangenti internamente alle tre delle date quattro; è chiaro, che una tra esse tutte ve ne dovrà esistere, la quale deve essere ben anche tangente interiormente alla quarta. Non resta dunque altro a fare, per la completa soluzione del primo proposto problema, che ritrovare nel luogo geometrico il conveniente punto. Per ottenere ciò, tutta la costruzione consiste nel determinare un secondo luogo geometrico, corrispondente alle tre sfere, delle quali i centri sono espressi dai punti C, D, F, collo stesso metodo adoperato pel primo, perchè l'incontro di essi due, darà ciò che si brama. Quantunque, per mezzo di quanto si è sopra detto, si può eseguire facilmente la costruzione del secondo luogo geometrico; nulla dimeno però per agevolare i principianti, l'accenneremo nella più breve maniera possibile.

Il triangolo, del quale gl'angoli sono i tre centri C, D, F, non combaciando col piano orizzontale, si abbassi su di questo, facendolo girare intorno CD, e supposto essere aDC; sopra tale triangolo si esegua la stessa costruzione, fatta, riguardo al triangolo CDE, per determinare i punti R, T, considerando però i lati CD, Da in vece dei due CD, DE. Or immaginando essere b, d le projezioni del primo punto del secondo luogo geometrico, segue, che, non essendo detto punto nella sua vera posizione, perchè il triangolo aDC si ritrova abbassato sul piano orizzontale, nel rimetter questo triangolo nella sua vera posizione facendolo girare intorno la CD, il punto vero corrispondente a b descrivendo nella projezione orizzontale una retta bg paralella ad AB, ed il punto d un arco di cerchio, che ha per centro G, e per raggio Gd; tagliata in GH

la porzione $Ge=Gc$, e dal punto e innalzata sopra Ge la perpendicolare $ef=cd$, se da f si abbassa sopra AB la perpendicolare, che taglia la bg nel punto g, saranno f, g le projezioni di un punto del secondo luogo geometrico nella sua vera posizione. Nella stessa maniera trovando altri punti nella projezione orizzontale, e verticale, ed unendo i primi con una linea, e con un' altra i secondi, si saranno ottenute le projezioni del secondo luogo geometrico. Or questo incontrandosi col primo in un punto; risulta, che gl' incontri delle rispettive projezioni, dinoteranno quello del centro cercato.

Se si bramasse la vera lunghezza del raggio di questa quinta sfera, si uniscano in ciascuna projezione, mediante una retta, il centro della quinta, e quello, come D di una qualunque delle quattro date sfere, da queste due rette, projezioni della congiungente i due centri veri, ricavando la vera lunghezza, se da essa si toglie il raggio della sfera del centro D, il residuo somministrerà, ciò che si è richiesto. Si noti, che nel determinare i raggi delle diverse sfere, le quali sono servite per trovare ciascuno dei due luogi geometrici, come quello appartenente alle tre sfere dei centri C, D, E; bisogna, che ciascun raggio delle sfere di costruzione non sia minore di quello del cerchio tangente internamente ai tre dei detti centri C, D, E, perchè, in caso contrario, non solo il primo luogo geometrico sarà impossibile, ma benanche il problema; questa stessa avvertenza bisogna avere per l'altro luogo geometrico.

Quanto finora abbiamo esposto, appartiene alla quinta sfera tangente interiormente alle quattro date. Se poi la questione si bramasse colla condizione,

di dover accadere la circostanza tangenziale nella parte esteriore delle quattro sfere. In tale ipotesi conviene descrivere ogni triangolo, come DOE, in maniera, che ciascuno dei due lati DO, OE sia eguale alla differenza del raggio della sfera di costruzione, e di quello della rispettiva data sfera, dal cui centro parte il lato.

Se la quinta sfera dev' essere tangente esteriormente a quella del centro E, ed interiormente alle rimanenti; i soli lati, che partono dal punto E, devono essere eguali alle differenze rispettive dei raggi delle sfere di costruzione, e di quelli del centro E, e tutti gl' altri alle somme corrispondenti dei raggi delle dette sfere di costruzione, e degl' altri delle convenienti date sfere.

Questi tre esempii, circa la ipotesi tangenziale, bastano per far conoscere il modo come regolarsi in tutte le altre, che si possono effettuire.

CAP. V.

Delle superficie tra loro seganti.

130. Due superficie traloro seganti, per quello che riguarda le loro particolari nature, potendo essere 1.° tutt' e due piane; 2.° una piana, e l' altra curva, 3.° finalmente tutt' e due curve; segue da tale distinzione, ch' essendosi nel paragrafo 97 risoluto il Problema, mediante il quale si sono trovate le projezioni del comune incontro di due superficie piane, le quali appartengono al primo assunto; resta nel presente capitolo a parlare soltanto dei due rimanenti.

131. Prima di tutto è da notarsi, che,

astrattamente parlando, il metodo generale per trovare le projezioni dell'incontro di due superficie, non consiste in altro, se non in far tagliare le medesime da un sistema di piani, ogn'uno dei quali formando due linee di sezione, che tra loro s'incontrano in punti, questi appartenendo alla sezione delle due superficie; se le rispettive projezioni dei detti punti si uniscono con linee, rappresenteranno esse le projezioni della comune sezione sopra detta.

132. Affinchè la costruzione riesca facile, conviene, che ciascun piano segante abbia tale posizione, da produrre nelle superficie sezioni rettilinee, se ciò non lo permettono le nature delle dette superficie, bisogna, che risultino tutte circolari, o pure in una superficie sia rettilinea e nell' altra circolare; se neppure ciò fusse possibile, fa di mestieri, che ciascun piano segante sia perpendicolare ad uno dei piani di projezione, acciò in questo la sezione essendo rettilinea, non vi sia bisogno tracciare in tutt' e due i piani coordinati linee curve.

133. A procedere con ordine divideremo questo Capitolo in due parti, nella prima risolveremo i problemi, nei quali le due superficie seganti sono una piana, e l' altra curva; nella seconda poi, qualora sono tutt' e due curve.

Dell' incontro di un piano con una superficie curva.

PROBL. XXV.

134 *Data una superficie curva conica, la quale venghi segata da un piano; trovare le projezioni del loro comune incontro.*

Le nature delle infinite linee di sezione, prodotte da un piano segante la superficie curva conica, si riducono a cinque specie diverse, dipendenti dalla posizione del piano segante. In primo luogo se il piano segante passa per qualunque posizione della generatrice, si produrranno sezioni rettilinee, le quali sono appunto lati del cono. In secondo se è paralello ad una sola posizione della generatrice, e quindi i segante con tutte le altre; la sezione sarà una curva a rami infiniti, la quale si chiama Parabola. In terzo se è paralello a due sole posizioni della generatrice, e perciò concorrente con tutte le rimanenti; cioè con una porzione al di sopra e coll' altra al disotto il vertice; la sezione risultante sarà espressa da una curva a rami infiniti, che si nomina Iperbole. In quarto se è concorrente con tutte le posizioni della generatrice, ed ha la posizione paralella alla base, la sezione risulterà una curva simile alle base istessa, la quale se è un cerchio, sarà circolare. In quinto finalmente, se il piano non solo è concorrente al disotto il vertice con tutte le posizioni della generatrice, ma benanche è obbliquo a quello della base, supponendosi questa circola-

re, la sezione, che ne deriva, sarà una curva, la quale ritorna in se stessa, e si chiama Ellisse.

In seguito di quanto veniamo di dire, e da notarsi, che la prima, e quarta sezione, essendo linee di facilissima costruzione le tralasceremo, ed esporremo soltanto il metodo generale della soluzione, il quale si applica, per ritrovare le projezioni di qualunque delle tré altre rimanenti. Perciò

F. 33 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; C, D le projezioni del vertice del cono; HI la base circolare esistente nel piano orizontale; ed EG, EF le tracce del piano dato.

Conviene primieramente esaminare, non solo se le tracce sono ben date, o sia se il piano è segante il cono, (limitato dal vertice, e dalla base, non considerando il suo prolungamento all' infinito, ne il cono alvertice opposto), ma eziandio la natura della sezione, che ne risulta. Per ciò fare.

Si conduca dal punto D la retta DK parallella ad EF, e dal punto C l'altra CL paralella ad AB; rappresenteranno DK, CL le projezioni di una retta orizontale paralella al piano dato, la quale passa pel vertice. Ritrovato l'incontro M di questa retta col piano verticale; è manifesto, che nel presente caso della figura, cadendo il punto M al di sopra di EG, e la traccia EF non incontrando il cerchio HI; non solo il dato piano è segante, ma benanche la sezione è una Ellisse.

Inoltre, potendo essere infinite le posizioni del piano; bisogna, per istruzione dei giovani, accennare il modo, come acquistare la sopradetta

conoscenza, in riguardo a tutte le altre; anzi per procedere con chiarezza e brevità, considereremo le diverse posizioni, che le tracce possono avere colla comune sezione ed in

1.° Essendo la traccia una sola, ed esistente nel piano verticale, risultando perciò parallella alla comune sezione; segue, che la projezione verticale del vertice del cono cadendo al disopra della traccia, il piano è non solo segante, ma benanche la sezione risultar deve circolare; qua ora poi il detto vertice si trova nella traccia, o al di sotto, il piano non essendo segante, sarà impossibile il Problema.

Inoltre l'unica traccia ritrovandosi nel piano orizontale, ed essa potendo avere due posizioni colla base circolare, cioè di essergli segante, o non incontrarla (la posizione tangente non si considera, perchè per la medesima accade lo stesso, che nella posizione non segante); nel primo caso sarà il piano sempre segante, colla circostanza però, che se la projezione orizontale del vertice cade nella traccia, la sezione sarà rettilinea; Se poi al di fuori; è chiaro, che fatto muovere il piano paralellamente a se stessa, finchè la traccia passi per la projezione orizontale del vertice; in questa posizione se la nuova traccia risulta tangente al cerchio, la sezione sarà Parabola; se segante, Iperbole; e se finalmente non incontra il cerchio, Ellisse. Nel secondo caso, tirate dal punto *D* le due tangenti *DH*, *DI* al cerchio *HNI*, se la traccia non incontra lo spazio mistilineo *DHNI*, o pure il solo punto *D* esiste in essa; il piano non sarà Segante; se poi taglia le due tangenti; incontrerà il Cono, e la sezione sarà Ellisse.

2.° Essendo due le tracce, ma paralelle al-

la comune sezione; quella nel piano orizzontale potendo avere due posizioni, cioè non incontrare, o essere segante colla base del cono: Per trovare ciò, che si dimanda, bisogna trasportare le projezioni del piano, e del cono nel terzo di projezione, del quale la comune sezione e aO. In questo piano dunque essendo P la projezione del vertice, QR quella della base, ed ST l'altra del piano segante, la quale, considerando la prima posizione, partir deve dal punto S esistente fuori la QR; è chiaro, che se la projezione P del vertice è tale, che si ritrova sopra di ST, il piano sarà segante, e la sezione una Ellisse; se poi al disotto, o in essa, non sarà incontrato il cono, e quindi il Problema riuscirà impossibile. Nella seconda posizione poi essendo VZ la projezione verticale del piano segante, la quale passa per un punto V, compreso nella QR, il piano sarà sempre segante, e la sezione sarà rettilinea, se la VZ passa pel vertice P; Se poi non passa per P, fatta muovere la VZ paralellamente a se stessa, finchè incontra il punto P, ed in questa situazione si trova passare pel punto Q, opure R, la sezione sarà Parabola; se incontra la QR al di fuori di essa, si otterrà una Ellisse; Finalmente se nella QR, risulterà una Iperbole.

3.° Le tracce essendo due, come EF, EG, concorrenti obbliquamente colla comune sezione, a tenore di quello, che si è sopra detto, 1.° cioè che la traccia orizzontale EF, non sia segante il cerchio HI; non vi è dubbio, che se il punto M si trova superiore, ad EG, il piano è segante, e la sezione Ellisse, e qualora cade in EG o al di sotto, il piano non è segante: resta soltanto a considerare il 2.° caso, nel quale la EF

è segante il cerchio HI. In tale Ipotesi è chiaro, che non solo il piano è sempre segante il cono, ma ben anche, facendo muovere detto piano paralellamente a se stesso, finchè la traccia verticale passi pel punto M; in questa posizione, se la traccia orizzontale, o'il suo prolungamento, non incontra il cerchio HI; la primitiva posizione del piano darà una Ellisse per sezione; se tangente, una Parabola; se segante, una Iperbole; e finalmente se la traccia verticale della naturale posizione del piano passa pel punto M, la sezione sarà rettilinea.

4.° Supponendo una delle due tracce, come quella orizzontale, essere perpendicolare alla comune sezione, e l'altra obbliqua; avrà luogo quanto si è detto nel qui avanti 3.° numero; colla sola variazione però, che la paralella alla traccia orizzontale, menata dal vertice, incontrando il piano verticale in C, projezione del vertice, bisogna far uso del punto C, non già M. Si eseguirà un simile ragionamento, per conoscere ciò, che risulta, qualora la traccia verticale sia perpendicolare alla comune sezione, e l'altra orizzontale obbliqua.

5.° Finalmente essendo le due tracce perpendicolari alla comune sezione, è facilissimo, dopo quanto veniamo di dire, ricavare le conseguenze, che si desiderano, senza che di nuovo si ripetano. Passiamo ora alla soluzione del Problema.

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; HI la base circolare del Cono esistente nel piano orizzontale; D, C le projezioni del vertice; ed EG, EF le tracce del piano. Fig 34

Dal punto D condotta la DK paralella ad EF, e da C la CL paralella ad AB, se dal

punto K s' innalza sopra AB la perpendicolare, che incontra in L la CL; sarà L l' incontro col piano verticale della retta, che dal vertice si conduce paralellamente ad EF.

Essendo manifesto, che, a tenore dei dati, non solo il piano è Segante; ma ben anche la sezione è una Ellisse, per trovare le projezioni, si può la costruzione eseguire con facilità, purchè il sistema dei piani seganti le due superficie date passi per la retta vera corrispondente a DK, a motivo che tutt' i piani seganti passando pel vertice del Cono, le sezioni colla superficie curva Conica sono rettilinee.

Inoltre qualunque piano segante, che passa per la retta vera di DK, incontrando il piano orizontale, ed il dato in rette paralelle ad EF; ne risulta, che i piani seganti devono avere due limiti, tra i quali restano compresi, e sono appunto le due tangenti al cerchio HI paralelle ad EF. Ciò posto.

Si tiri da qualunque punto T della circonferenza la retta MTN paralella ad EF; congiunta la LM, saranno LM, MN le tracce di un piano segante; quindi condotte le DT, DV, esprimeranno queste le projezioni orizontali delle sezioni rettilinee, formate dal piano segante nella superficie curva Conica: ed abbassata dal punto O, incontro delle due tracce verticali EG, LM, sopra AB la perpendicolare OP, e dal punto P condotta ad EF la paralella PQ; dinoterà questa la projezione orizontale dell' incontro del piano segante col dato. Trovandosi dunque le tre rette vere corrispondenti a DT, DV, PQ nello stesso piano, i due punti R, S saranno le projezioni orizontali del loro incontro, e quindi di due punti della cercata curva. In conseguenza di

questi si troveranno i corrispondenti in projezione verticale.

Similmente operando per ciascuno degl' altri piani seganti, che si vorranno, si otterrà un numero di punti nella projezione orizontale, ed un altro nel piano verticale. Finalmente per tutt' i primi facendo passare una linea, ed un' altra per i secondi, si saranno con esse ottenute le projezioni dell' incontro cercato.

PROBL. XXVI.

135. *Data la superficie di un Ellittoide, ed un piano segante, ritrovare le projezioni del loro comune incontro.*

È chiarissimo, con piccola riflessione che si facci, non poter essere, qualunque sezione formata in detta superficie da un piano segante, se non di due specie, cioè circolare, ed Ellittica.

Per rendere semplici le costruzioni; conviene preferire per piano verticale di projezione quello, che è paralello all' asse.

Dinoti *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione. *CD*, *EF* le projezioni dell' asse, una delle quali, cioè la projezione orizontale *EF*, sia paralella ad *AB*; *HG*, *GI* le tracce del dato piano, e *CNDO* la curva Ellittica. Fig. 35

Per conoscere, se il dato piano è segante, tangente, o pure non incontra la superficie dell' Ellittoide, bisogna immaginare muoversi le due superficie, in modo che, senza cambiare la loro scambievole data posizione, risulti l' asse dell' Elittoide perpendicolare al piano di projezione

orizontale; in questo la nuova traccia dovendo essere diversa dalla *GI*, si preferisca per piano verticale di projezione quello, che è perpendicolare alla detta nuova traccia. Or in questo piano verticale venendo espresso il dato piano da una retta; segue non solo, dopo avere tracciata l'Ellisse generatrice, la quale è la stessa che la data, che se detta retta gli è tangente, segante, o pure non l'incontra, benanche tale è il dato piano coll'Ellittoide; ma eziandio che, se da due punti cogniti dell'asse si abbassano sul dato piano due perpendicolari, e si trovano le loro vere lunghezze, costruito il trapezio, il quale viene formato dalla porzione dell'asse, compresa dai due detti punti, dalle due perpendicolari, e dal lato risultante, opposto all'asse; la posizione di questo ultimo lato, riguardo all'Ellisse, darà la cercata conoscenza.

Per eseguire la costruzione, sapendosi, che, dai punti *C*, *D* abbassate sopra *GH* le perpendicolari indefinite *CH*, *DR*, e dagl'altri *E*, *F* le altre *EK*, *FI* sopra *GI*, in esse cader devono le projezioni delle due vere perpendicolari, delle quali gl'incontri col piano orizontale dei loro prolungamenti, sono i punti *L*, *M*; conviene determinare le vere lunghezze delle due porzioni delle perpendicolari indefinite, le quali sono limitate dal piano dato, e dall'altro orizontale: per eseguire la costruzione; siccome ciascuna è uno dei due cateti di un triangolo rettangolo, ed essi triangoli sono espressi in projezione orizontale dalle rette *LK*, *MI*, le quali ben anche dinotano le vere Ipotenuse; così non bisogna far altro, che trovare l'angolo d'inclinazione del dato piano con quello di projezione rizontale. Perciò abbassata dal punto *R* sopra

AB la perpendicolare *RZ*, da *Z* condotta a *GI* una paralella, in questa tagliata $aS{=}RZ$, e congiunta la *KS*, se gli si abbassa da *L* la perpendicolare *LT*, tale retta dinoterà una delle due perpendicolari di determinata lunghezza. La simile costruzione fatta per la seconda, la quale si suppone essere *MV*, non meno che per determinare le vere lunghezze delle altre appartenenti alle *Dl*, *Cm*; segue che, se centro *D* intervallo *Db*= alla differenza di *LT* e della retta vera di *Dl* si descrive una circonferenza di cerchio, ed un' altra col centro *C* ed intervallo *Cc*= alla differenza di *MV*, e della retta vera di *Cm*; tirata ai due cerchi la comune tangente *bc*; siccome il cennato trapezio è *bDCc*; così la posizione della *bc*, colla curva Ellittica *CNDO* darà la richiesta conoscenza. Nel presente caso della figura, non risultando segante; possiamo conchiudere, che il dato piano è pure tale coll' Ellittoide.

Posto quanto veniamo di dire, passiamo alla soluzione da principio proposta, supponendo essere il piano segante, e quindi che la tangente non sia espressa da *bc*, ma da *hi* segante la curva Ellittica.

Dovendoci servire di un sistema di piani seganti le due superficie date, devono tutti essi, per facilitare le costruzioni, risultare perpendicolari all' asse; perchè in queste sole posizioni otterremo nell' Ellittoide sezioni circolari. perciò.

Da un punto *S* della curva Ellittica tirata la *HSP* perpendicolare all' asse *DC*, e dal punto *P*, incontro colla comune sezione, innalzata sopra di questa la perpendicolare *PQ*, dinotando *HP*, *PQ* le tracce di uno dei piani seganti; Fig.36

ne deriva, che, in HP cadendo le due sezioni del dato piano, e dell' Ellittoide; siccome tra loro non rimangono distinte le projezioni verticali delle due sezioni; e la PQ non incontra dentro il disegno la GI; così trasportando il piano HPQ paralellamente a se stesso finchè la traccia PQ incontri la GI; dal punto d' incontro I tirata IT paralella a PQ, da T la TZ paralella a PH, abbassando dal punto Z sopra AB la perpendicolare ZV, congiungendo colla VI i due punti V, I, non meno che dal punto H abbassando sopra AB la perpendicolare Ha, e dal punto a conducendo alla VI la paralella ab; Sarà questa la projezione orizontale dell' incontro del piano segante col dato piano. Inoltre dal punto b abbassando sopra AB la perpendicolare, ed il punto d' incontro d colla HP dinotando la projezione verticale corrispondente al punto b, se si fa girare il piano segante intorno la HP (la quale è la sua traccia verticale), finchè combaci col piano verticale; segue, che per essere il piano segante perpendicolare al piano verticale, abbassata dal punto e sopra AB la perpendicolare; sarà gf, la distanza del centro della sezione circolare al piano verticale. Quindi tagliata nella direzione dell' asse la $eh=gf$, e col centro h intervallo la metà di SR descritto un cerchio, e dal punto d innalzata sopra HP la perpendicolare $di=cb$, e condotta la Hi; saranno Hi la sezione del piano segante col dato, ed il cerchio l' altra colla superficie dell' Ellittoide. Or queste due sezioni incontrandosi nei punti l, m, che appartengono alla curva di sezione cercata; perciò da essi abbassate sopra HP le perpendicolari, i loro incontri dinoteranno le projezioni verticali dei detti punti l, m; se dai punti di proje-

zione verticale si abbassano sopra *AB* le perpendicolari, ed a partire dalla comune sezione si tagliano le porzioni rispettivamente eguali alle dette perpendicolari dei punti *l*, *m*; dinoteranno gl' estremi di queste ultime perpendicolari le projezioni orizontali dei punti *l*, *m*, o sia di due punti della sezione cercata.

La stessa costruzione eseguendo per tutti gl' altri piani seganti paralelli ad *HP*, si otterranno altri punti in projezione orizontale, e verticale. Finalmente uniti li primi con una linea, e con un' altra i secondi; le due curve rappresenteranno le projezioni della cercata curva di sezione.

Si noti, che i piani seganti dovendo avere due limiti, tra i quali essere compresi, e dipendenti dalla grandezza della sezione delle due superficie; questi limiti facilmente si possono determinare mediante la fig. 55, perchè la *hi* tagliando la curva Ellittica nei punti *d*, *e*, se da questi si abbassano sull' asse le perpendicolari *df*, *eg*, ed i punti *f*, *g*, dell' asse si trasportano in quello della fig. 56, si saranno determinate le posizioni dei piani estremi seganti. Tale determinazione è necessaria, affine di non perdere il tempo nel costruire quelle sezioni, le quali non danno alcun risultato, per motivo che cadono fuori la curva di sezione delle due superficie.

Dell' incontro di due superficie curve.

PROBL. XXVII.

186. Date due superficie coniche tra loro seganti, trovare le projezioni del loro comune incontro.

Fig. 37 Esprima XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF le basi circolari dei coni esistenti nel piano orizzontale; G, H le projezioni del vertice del cono, che ha per base CD; K, I quelle del secondo.

A tenore del sistema da noi tenuto, convienne esaminare, se i dati sono tali, che i due coni risultano tra loro seganti, e ciò per la triplice posizione, che possono tra loro avere; cioè di essere seganti, tangenti, o non incontrarsi.

Si tirino ai due cerchi delle basi le tangenti interne LM, NO; i punti di contatto C, D col cerchio CD si uniscano col vertice G mediante le rette GC, GD, e gl' altri due E, F collo stesso punto G per mezzo delle rette PF, VE. E chiaro, che colla eseguita costruzione abbiamo formato una nuova superficie, composta dai due piani $PGCL$, $VGDN$ indefiniti verso P, L; V, N; dalla superficie conica finita $CGDRC$, e dall' altra PGV indefinita verso P, V, la quale è opposta all' altra EGF. La detta superficie è appunto il *Luogo Geometrico*, il quale ci somministra il modo, come facilmente conoscere la scambievole posizione dei due coni. In fatti se il vertice, dinotato da K, si trova nel luogo geometrico, i due coni sono tra loro tangenti; se nello spazio interno, seganti; se finalmente al di fuori, non si incontrano.

Per farne l' applicazione ai dati della figura : Essendo il punto K projezione orizontale del vertice del secondo cono , e dell' incontro del piano $PGCL$, appartenente al luogo Geometrico , colla retta verticale , che passa pel medesimo vertice ; siccome la projezione verticale del primo è il punto I; così per trovare quella del secondo, si conduca dal punto K la KT paralella ad LC, questa incontrando in T il lato espresso da GC, del quale la projezione verticale è HQ, se da T si abbassa sopra AB una perpendicolare, che taglia in R la HQ, menata da R la RS paralella ad AB, l' incontro S colla perpendicolare IK dinoterà la projezione verticale del punto K, considerato esistere nel piano $PGCL$. Segue da ciò, che il punto I cadendo al disotto di S, tale circostanza dinota , che il vertice del secondo cono , si trova dentro il luogo geometrico ; quindi i due coni sono tra loro seganti ; Se poi il punto S cadesse in I; il vertice esistendo nel luogo geometrico, sarebbero tangenti li due dati coni ; se finalmente il punto S si trovasse al di sotto di I, non s' incontrarebbero. Conviene ora passare alla soluzione : cioè trovare le projezioni del comune incontro di due coni.

Sia XY il foglio del disegno ; AB la comune sezione , dei due coni; dinotino MO, IK le basi esistenti nel piano orizontale, e che per facilitazione le supponiamo circolari ; C , D le projezioni del vertice del cono , il quale ha per base MO ; ed E , F quelle dell' altro. Fig. 38

Qualunque piano segante, che passa pel vertice di un cono, producendo nella superficie curva sezioni rettilinee; segue, che tirate le CE, DF, appartenendo queste alla retta congiungente li due

vertici, se per essa si fanno passare tutti li piani seganti, questi formando sempre sezioni rettilinee, detti piani preferir si devono per maggiore facilitazione a tutti gl' altri, che adoprar si possono. Or essendo limitate le sezioni, perchè tali sono le curve delle basi delle date superficie; non vi è dubbio, che ai piani seganti spettano due limiti, tra i quali devono essere compresi. Per ritrovarli, si prolunghi la congiungente i vertici, finchè incontri il piano orizontale, e fatta la costruzione, sia *H* tale incontro, per questo dovendo passare le tracce di tutti li piani seganti, se da esso si tirano due rette *HI*, *HK* tali, che ogn' una sia segante ad una base, e tangente all' altra, o pure, se le circostanze lo permettessero, tangente a tutt'e due; le dette rette dinoteranno le tracce dei piani estremi seganti, perchè tutte le altre, che si tirano al di fuori di esse, incontrando soltanto in alcune posizioni una sola base, ed in altre niuna di esse; i piani, ai quali appartengono, non incontrando tutt' e due le superficie, non passeranno per la comune sezione di esse, e quindi saranno inutili a farne uso.

Dovendo adunque tutte le tracce dei piani seganti essere contenute fra *HI*, *HK*, queste ben anche comprese; si tiri tra esse una qualunque retta *HS*, questa tagliando le due circonferenze nei punti *P*, *Q*, *R*, *S*, condotte ai rispettivi vertici le rette *PC*, *QC*, *RE*, *SE*; saranno queste le projezioni orizontali delle sezioni prodotte nei due coni dal piano della traccia *HS*.

Or queste quattro rette trovandosi in un piano, i quattro punti di scambievole incontro *a*, *b*, *c*, *d* dinoteranno le projezioni orizontali

di quattro punti, li quali appartengono benanche al comune incontro dei due coni. Per avere le projezioni verticali corrispondenti ai detti punti; siccome i due *a*, *b*, esistono nel lato spettante a *CP*, e *c*, *d*, nell'altro corrispondente a *CQ*; così trovando le projezioni verticali appartenenti a detti due lati, ed abbassando dai punti *a*, *b*, *c*, *d* sopra la comune sezione le perpendicolari; i rispettivi incontri con le projezioni verticali dei detti due lati daranno ciò, che si cercava, non si è eseguita la costruzione per essere facilissima.

Similmente operando per tutte le altre tracce, che si tirano tra le *HI*, *HK*, si otterranno altri punti nelle projezioni orizontale, e verticale; finalmente i primi uniti con una o due linee e lo stesso eseguendo per i secondi, si saranno con ciò ottenute le projezioni dell' incontro dei due coni. Si è detto, che in ciascuna projezione i punti si devono unire con una, o due linee, perchè nell'incontrarsi due coni, non sempre si ottiene una sola linea per sezione, ma spesso, a seconda delle posizioni, ne risultano due. Per sapere, quando i dati del problema danno una, o due curve, basta riflettere alle posizioni delle due *HI*, *HK*; perchè se non solo il punto *H* cade fuori delle due basi, ma benanche le due rette risultano seganti ad una base, e tangenti all'altra, come si verifica nella presente figura; ciò è segno, che sempre sono due le curve di sezione, in caso contrario, una sola; In fatti il punto *H* trovandosi fuori delle due basi, questa prima circostanza dinotando, che il vertice di uno dei due coni si trova fuori dell' altro, e la seconda, cioè che, le due *HI*, *HK* segano la base *MO*, additan-

do che nel cono di questa base vi restano intatte le due sue parti opposte, corrispondenti ai segmenti circolari LeO, mfn. Perciò, essendo incontrata la sola porzione intermedia dall' altro cono, il quale entra da una parte, e sorte dall' opposta; ne segue, che devono formarsi due sezioni tra loro distinte. La detta cognizione porta seco il dover rispondere alla seguente dimanda. Come tra tutt' i punti avuti in una projezione si distingueranno quelli di una curva dagl' altri della seconda? La risposta è facilissima. Da poicchè gl' archi circolari mL, nO della base appartenendo alle due porzioni della superficie conica nelle quali esistono le due curve; perciò tutt' i punti, che si ottengono dai lati, che partono dall' arco mL spettano ad una, e gl' altri che risultano dai lati del secondo arco, all' altra curva. Anzi affinchè non ne derivi confusione, bisogna segnare, secondo che si trovano, i punti, con diverso colore, per esempio quelli di una curva col negro, e gl'altri col rosso.

Finalmente per tutt'i punti avuti nella projezione orizzontale, ed appartenenti ad ogni curva, potendo passare diverse curve; per ottenere la vera, bisogna unire con rette i punti contigui; nell' atto che si ritrovano, l'uno appresso l' altro, ciò fatto, se per tutti gli angoli del Poligono ritrovato si fa passare una curva, si sarà descritta la projezione orizzontale, in conseguenza di questa tracciando la projezione verticale, si sarà completamente risoluto il problema.

PROBL. XXVIII.

137. *Date due superficie cilindriche tra loro seganti, descrivere le projezioni del loro comune incontro.*

Dinoti XY il foglio del disegno; AB la co- Fig 39 mune sezione; DE, IL dei due cilindri le basi circolari esistenti nel piano orizzontale; FC, HG le projezioni di una generatrice, e KM, NQ quelle dell' altra.

Supporremo per facilità, che li due cilindri siano terminati nella parte inferiore dai due cerchi DE, IL, e nella parte superiore vadino all' infinito.

Per distinguere dalle projezioni, se i detti due cilindri sono tra loro seganti, tangenti, o pure non s' incontrano, si tirino alle due basi le tangenti interne DL; EI, per queste facendo passare due piani tangenti ad uno dei due cilindri, come a quello delle base DE; siccome la comune sezione di essi piani tangenti risulta paralella alla generatrice FC; così dal punto O tirata OP paralella ad FC, i due piani, che passano per la retta vera di OP, e per ciascuna delle due tangenti OE, OD, non meno che il piano orizzontale, daranno il luogo Geometrico, il quale somministra la conoscenza, che si ricerca. In fatti da un punto qualunque, preso nella retta vera corrispondente a PO, condotta una paralella alla generatrice dell' altro cilindro; è chiaro, che se 1.° questa retta incontra il piano orizzontale in O, ciò essendo segno, che le due generatrici sono tra loro paralelle, saranno pure tali li due cilindri, e quindi non s' incontreranno; 2.° Se l'incontro cade in una delle due porzioni OD, OE, indefinite verso D, E delle

due tangenti, li due cilindri non s' incontreranno: 3°. Se nelle altre OI, OL indefinite verso I, L saranno tra loro tangenti li cilindri; 4.° Se dentro l' angolo DOE o pure negl' altri DOI, EOL, neppure s' incontreranno; 5.° finalmente se nell' angolo IOL, i due cilindri risulteranno tra loro seganti.

Per entrare ora nella soluzione dimandata. Fig. 10 Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione; CD, EF dei due cilindri le basi circolari, esistenti nel piano orizzontale; CG, IK le projezioni di una generatrice, ed HF, LM quelle dell' altra, colla condizione però, che fatto il sopradetto esame, risultino tra loro seganti li cilindri. Considerando una delle due superficie, indipendentemente dall' altra, ci è pur troppo cognito, che, venendo generata da una linea retta, vi deve sempre essere un sistema di piani seganti tra loro paralelli, li quali producono sezioni rettilinee; potrebbe soltanto sorgere il dubbio, volendosi unitamente considerare le due superficie; Tale dubbio non potendo avere luogo perchè l' incontro delle due superficie essendo una linea ad esse comune, se da un suo punto si tirano due rette paralelle alle due generatrici, dovendo ciascuna trovarsi in una posizione della generatrice del rispettivo cilindro; segue, che per dette due rette, tra loro concorrenti, potendovi passare un piano, e questo formando nei due cilindri sezioni rettilinee, non solo vi dev' essere un sistema di piani seganti, che producono sezioni rettilinee nei due cilindri, ma benanche devono essere tutti tra loro paralelli.

Per determinare un solo dei piani seganti, essendoci per ora ignoto l' incontro dei due cilindri, si tiri per un punto qualunque O, preso

nella projezione orizontale di una delle due generatrici, come *CG*, una paralella *ON* alla projezione orizontale *HF* dell' altra generatrice; sarà detta *ON* la projezione orizontale di una retta, condotta da un punto di una delle due generatrici, paralella all' altra, e trovando l' incontro *N* di tale paralella col piano orizontale; Se i due punti *C*, *N* si uniscono con una retta; per quello che abbiamo detto, esprimerà *CN* la traccia orizontale di uno degl' innumerevoli piani seganti, ed alla quale traccia devono essere paralelle tutte le altre appartenenti al piano orizontale. Or essendo limitate le curve delle basi, e per tale motivo i piani seganti dovendo avere due limiti, per determinarli; siccome ciascuna curva ritorna in sestessa, così è sufficiente condurre due rette *PR*, *QS* paralelle a *CN*, ma tali, che ogn' una sia segante ad una base, e tangente all' altra (si noti, che vi può essere un solo caso, nel quale le due rette risultano tangenti nel tempo stesso ai due cerchi, ed accade, quando non solo questi sono eguali, ma ben anche la *CN* risulta paralella alla congiungente i centri). Ciò eseguito si tiri tra le *PR*, *QS* una *TV* ad esse paralella, questa incontrando le due circonferenze nei punti *a*, *b*, *c*, *d*, se per i due primi si conducono due rette paralelle a *CG*, e per i due secondi le altre paralelle ad *HF*, dette quattro rette incontrandosi tra loro in quattro punti, dinoteranno questi le projezioni orizontali di quattro punti appartenenti alla cercata curva di sezione; in conseguenza delle projezioni orizontali si troveranno quelle nel piano verticale.

Similmente operando per tutte le altre paralelle tirate tra le due *PR*, *QS* si determineranno tanti altri punti in projezione orizontale,

e verticale. Finalmente uniti quelli in ciascuna projezione con una, o due curve, si saranno ottenute le projezioni dimandate dell' incontro dei due cilindri.

Non ci siamo dilungati maggiormente in questa soluzione. perchè tutto ciò, che si è detto per i coni, si applica ai Cilindri, e la sola variazione la quale passa tra questi due Problemi, non è altra, se non che nei Coni le tracce partono tutte da un punto, e le sezioni prodotte in ciascun Cono sono rette concorrenti nel vertice, e nei Cilindri le tracce risultano tra loro paralelle, e le sezioni nei rispettivi Cilindri sono rette paralelle alle corrispondenti generatrici.

È da notarsi in ultimo, che per la sola presente specie particolarissima, dei coni, e cilindri, la quale consiste nell'essere le basi di nature circolari, possiamo fare uso di un altro sistema di piani seganti, cioè paralelli al piano di projezione orizontale; per motivo che le sezioni risultando circolari, sono di facile costruzione. Ci asteniamo specificare tutte le operazioni necessarie, perchè dopo quanto si è finora detto, può ogn'uno da per se stesso agevolmente eseguirle.

BLOBL. XXIX.

138. Date le mezze superficie del conocuneo, e dell' anello sferico, le quali sieno tra loro seganti; trovare le projezioni del loro comune incontro.

Fig. 41 Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; La direttrice curva del cono-cuneo venghi espressa dalla mezza Ellisse *FEG* tracciata nel piano verticale; la direttrice rettilinea sia rappresentata in projezione orizontale dal pun–

to C, e nella projezione verticale dal mezzo asse minore ED, e le posizioni della generatrice rettilinea siano tutte orizontali; della superficie anulare poi, la generatrice venghi dinotata dal mezzo cerchio HIK (abbassato sul piano orizontale), il quale ha sempre in tutte le posizioni non solo la direzione verticale, ma ben anche il suo piano passa per la direttrice rettilinea del conocuneo, espressa in projezione orizontale dal punto C; Il diametro HK esista sempre nel piano orizontale, ed il raggio del cerchio HIK sia eguale alla DE.

Il sistema dei piani seganti potendo avere due posizioni; cioè di essere tutti orizontali, o pure tutti verticali passanti per la retta espressa dal punto C in projezione orizontale; siccome in qualunque dei due sistemi, le sezioni colla superficie dell'anello sferico sono linee circolari, e quelle col cono-cuneo linee rette; così essendo indifferente far uso dell'uno o dell'altro, risolveremo il problema col primo.

Perciò col centro C ed intervalli i raggi CK, CH descritti due archi di cerchio KL, HM, i quattro punti K, H, M, L, esistenti nel piano orizontale, saranno le projezioni orizontali di quattro punti della sezione cercata, li corrispondenti poi in projezione verticale si ottengono abbassando dai detti punti le perpendicolari sopra la comune sezione. Inoltre nel piano verticale tirata una retta NO paralella ad AB, e segante la mezza ellisse FEG nei punti N, O, e supponendo essere la NO projezione verticale di un piano orizontale segante; è chiaro, che dai punti N, O abbassate sopra AB le perpendicolari NQ, OP, e tirate le QC, PC, saranno queste le projezioni orizontali delle sezioni appartenenti

al cono-cuneo, e le projezioni verticali cadono nella NO. Per determinare le sezioni nell' anello sferico, si conduca nel semicerchio HIK la retta RS paralella ad FC, e distante per l' altezza NQ; abbassate le perpendicolari RT, SV, se centro C intervalli CT, CV si descrivano due archi di cerchio, che incontranò le QC, PC, nei quattro punti a, b, c, d; queste sono le projezioni orizzontali di altri quattro punti delle sezioni; le projezioni verticali, dovendo cadere nella NO, si troveranno perciò con abbassare dai detti quattro punti a, b, c, d sopra AB le perpendicolari. Similmente operando per tutti gl' altri piani seganti, che si vorranno adoprare, si determineranno altri punti in projezione orizontale, e verticale. Finalmente uniti quelli in projezione orizontale colle due curve $HaecL$, $MbedK$ e con altre due quelli nel piano verticale, si sarà sciolto il problema.

Di questo problema occorre farne uso in architettura, nella costruzione delle *volte* tra le quali le due date superficie ne formano una.

PROBL. XXX.

139. Data una superficie sferica, ed un' altra cilindrica tra loro seganti, trovare le projezioni del loro comune incontro.

Supporremo, che la superficie sferica invece di essere intera sia la metà, ed il cerchio massimo, che n' è la base, esista nel piano orizontale. Il cilindro poi sia retto, la sua base un mezzo cerchio perpendicolare ai due piani di projezione, ed a questi la generatrice abbia la posizione paralella.

Fig. 42 Sia XY il foglio del disegno; AB la comu-

ne sezione; della sfera siano C, D le projezioni del centro, esistente nel piano orizontale, ed EF il cerchio massimo (che si trova benanche nel piano orizontale) sua base. Del cilindro poi la base sia dinotata in projezione orizontale, e verticale dalle due rette GH, LK perpendicolari ad AB, e delle quali LK è metà di GH. Essendo questa base un mezzo cerchio, venghi espresso da GIH, dopo essersi abbassato sul piano orizontale, avendolo fatto muovere intorno GH, la quale si trova nel piano orizontale. Finalmente rappresenti GM, paralella ad AB, la generatrice esistente nel piano orizontale.

Nella superficie sferica, qualunque sia la direzione di un piano segante, formandosi sempre una sezione circolare; ed ancora se detto piano si suppone passare di mano in mano per ciascuna delle diverse posizioni della generatrice della superficie cilindrica, in essa dovendosi formare sezioni rettilinee, possiamo perciò conchiudere, che vi sarà sempre un sistema di piani seganti, ogn' uno dei quali produce nelle due superficie sezioni di facile costruzione. Da questa riflessione ricavandosi, che le direzioni dei piani seganti, per essere GM paralella ad AB, possono essere paralelli al piano verticale. Si tiri perciò ad AB la paralella OF, questa esprimendo la projezione orizontale del piano segante le due superficie; segue, che le projezioni orizontali delle due sezioni cadendo in essa retta, conviene, per trovare i punti d' incontro delle due dette sezioni, formare le projezioni verticali di queste. Or la sezione (nella sfera) dinotata da RF essendo un mezzo cerchio paralello al piano verticale, ed il raggio eguale alla metà di RF; perciò descritto col centro D, e col detto raggio

la mezza circonferenza *ecd*, sarà questa la projezione verticale della sezione colla sfera. Inoltre la sezione rettilinea col cilindro, dovendo partire dal punto *O* della mezza circonferenza *GIH*, essere paralella ai due piani di projezione, ed avere sul piano orizontale un' altezza eguale ad *ON*; *O*. Adunque nella *LK* tagliata $LP = ON$, e da *P* condotta *PQ* paralella ad *AB*, sarà *PQ* la projezione verticale della sezione formata nella superficie cilindrica dal piano segante. Or le due *PQ*, ed *ecd* incontrandosi nei punti *S*, *T*, saranno questi le projezioni verticali di due punti della cercata sezione. Se da essi punti si abbassano sopra la comune sezione due perpendicolari, le quali incontrano la *OF* nei punti *a*, *b*, dinoteranno questi le projezioni orizontali, corrispondenti ad *S*, *T*.

La medesima costruzione eseguendo per ciascuno di tutti gl' altri piani seganti, otterremo molti punti in projezione orizontale, e verticale; Finalmente uniti li primi con una o due linee, e lo stesso facendo per i secondi, esprimeranno le dette curve ciò che si è dimandato.

Si noti 1.°, che nella posizione delle due date superficie, se il raggio della base del Cilindro fusse maggiore di quello della sfera, ed i lati del Cilindro, che partono dagli estremi *G*, *H* del diametro *GH*, non incontrassero il cerchio *EF*, il Problema sarebbe impossibile, perchè la mezza sfera resterebbe contenuta nello spazio concavo del Cilindro; se poi un solo dei due lati tagliasse la circonferenza *EF*, le superficie risultarebbero tra loro seganti, e si otterrebbe una sola curva di sezione. 2.° Se il raggio del Cilindro, e l' altro della sfera fussero eguali, e le posizioni dei due detti lati del Ci-

lindro si supponessero tangenti al cerchio EF, le due superficie diverrebbero tra loro tangenti, per ciò non vi sarebbe sezione; se poi uno dei due lati fosse segante la detta circonferenza, risultarebbe una sola sezione. 3.° Supponendo il raggio della base del Cilindro essere minore dell'altro della sfera, se ai due lati sopradetti del Cilindro si dasse la posizione segante la circonferenza EF, avressimo due curve di sezione, se un solo, una sola. 4.° Finalmente, si può avere lo stesso risultato, che si brama, facendo uso di un sistema di piani seganti paralelli al piano orizontale, in vece di essere paralelli al piano verticale.

Di questa soluzione conviene fare uso, qualora occorre in Architettura formare il disegno di una *Volta* sferica, nella quale vi siano delle aperture, per i Lumi ingredienti, di figura Cilindrica.

PROBL. XXXI.

140. Data una piramide triangolare infinita, trovare la posizione di un piano, il quale formi in essa una sezione eguale ad un triangolo dato.

Sia XY il foglio del disegno; AB la comune sezione. Li tre angoli piani, che formano l'angolo solido del vertice della piramide, venghino espressi da CDE, EDF, FDG; e finalmente HIK rappresenti il triangolo dato. Fig. 43

Supposto condotto il piano cercato, la piramide infinita si sarà ridotta in un'altra finita, la quale ha l'istesso vertice, che la data, e la base è il triangolo HIK; altro dunque non resta, a fare, che trovare le projezioni del suo vertice,

appartenente alla base, che è il triangolo *HIK*.

Si costruisca sul lato *HI* l' angolo *HLI* eguale ad uno dei tre dati, come a *CDE*; sopra *HK* l' altro *HMK*= ad uno dei due rimanenti come *EDF*, e finalmente sopra *IK* il terzo *INK*= al terzo *FDG*, e per i tre vertici di ciascuno dei triangoli *HLI*, *HMK*, *INK* facendo passare un arco di cerchio, avremo costruito tre porzioni circolari; ciò fatto, è chiaro che facendosi girare ciascuna porzione circolare intorno la sua corda, si descriveranno tre superficie di rivoluzione regolare, che due a due incontrandosi, daranno in tutto tre linee, le quali si segano in un punto; questo sarà il vertice cercato; per rinvenirlo si determini nell' arco *HLI* un punto *P*, questo, nel girare il segmento circolare *HLI* intorno la sua corda descrivendo un arco circolare, il quale in projezione orizontale deve cadere nella *PR*, menata dal punto *P* perpendicolarmente ad *HI*; ed inoltre nell' arco *NMK*, tirata la corda *HQ* eguale ad *HP*; siccome il punto *Q*, nel girare il segmento *HMK* intorno *HK*, descrive un arco di cerchio, il quale nella projezione orizontale deve trovarsi nella perpendicolare *QR*, abbassata dal punto *Q* sopra *HK*, così risulta, che le due *PR*, *QR* incontrandosi nel punto *R*, sarà questo la projezione orizontale di un punto della comune sezione delle due superficie descritte dai due archi *HLI*, *HMK*.

Similmente operando col tirare precedentemente dal punto *H* nei due segmenti *HLI*, *HMK* quante corde si vogliono eguali ciascuna a ciascuna, si otterranno tanti altri punti, i quali uniti con una linea, che supporremo essere *HRS*, questa dinoterà la projezione orizonta-

le della sezione delle due superficie generate dai due archi HLI, HMK. Lo stesso eseguendo per le altre superficie formate dagli archi HMK, INK, avremo una seconda curva KS.

Queste due curve tagliandosi in S tal punto esprimerà la projezione orizontale del vertice della piramide (non è necessario tracciare la terza curva, perchè tutt' e tre s' incontrano in un punto). Per avere ora la sua projezione verticale, si abbassi dal punto S sopra uno dei tre lati, come HK, del triangolo HIK, la perpendicolare SV; siccome l' altezza sul piano orizontale spettante ad S è il cateto verticale di un triangolo rettangolo, del quale il cateto orizontale è ST, e TV l' Ipotenusa; così tirata dal punto S una retta indefinita perpendicolare ad AB, tagliata $Za=ST$, e centro a ed intervallo un raggio eguale TV descritto un arco di cerchio, che incontra la detta perpendicolare in b, esprimerà questo la dimandata projezione verticale.

Segue da ciò, che determinate le tre vere distanze, del vertice, appartenente ad S, ai tre punti H, I, M; se si tagliano le due DC, DG eguali tra loro, e ciascuna eguale al lato vero di I; $DE=$ all' altro di H; e $DF=$ alla terza distanza di K, e le tre facce CDE, EDF, FDG si configurano in piramide, è chiaro, che il piano, il quale passa per i punti C, E, F, (non si nomina G, perchè questo forma con C un punto solo) farà nella data piramide infinita una sezione eguale al triangolo HIK.

Questo Problema può avere sei soluzioni, dipendenti dal destino, che si disporrà di ciascuno dei tre dati angoli rispetto a ciascuno dei lati del dato triangolo. In fatti si ricaveranno le dette soluzioni facendo 1.° l' angolo $HLI=CDE$,

$INK=EDF$, ed $HMK=FDG$: 2.° l' angolo $HLI=EDF$, $INK=FDG$, ed $HMK=CDE$; 3.° l' angolo $HLI=FDG$, $INK=CDE$, ed $HMK=EDF$; 4.° l' angolo $HLI=CDE$, $INK=FDG$, e $HMK=EDF$; 5.° l' angolo $HLI=EDF$, $INK=CDE$, ed $HMK=FDG$; 6.° finalmente l' angolo $HLI=FDG$, $INK=EDF$, ed $HMK=CDE$

C A P. VI.

Sviluppo delle superficie a semplice Curvatura.

141. Quanto si è esposto nel Cap. 1.° di questa scienza, essendo sufficiente a far comprendere adequatamente, ed in astratto l' idea della proprietà sviluppabile di una superficie; conviene ora mostrare il modo, come effettivamente, ed in disegno eseguire le costruzioni, per ottenere lo sviluppo; e siccome la superficie sviluppabili sono di due specie, cioè Coniche, e Cilindriche; così questo Capitolo, a differenza di tutti gl' altri non potendo contenere se non due soli Problemi, il primo appartenente ai Coni, ed il secondo ai Cilindri. Perciò procureremo esporre l'assunto in maniera, che non tralasciando ciò che sia necessario, risulti colla massima chiarezza possibile.

PROBL. XXXII.

142. Sviluppare una superficie Conica.

Ogni superficie Conica potendosi stimare come una seguela di elementi triangolari di primo ordine, posti l' uno appresso l' altro; è pur troppo manifesto, che per appianare, o sia sviluppare la superficie curva del Cono, si hanno da

fare due operazioni, la prima consiste nel trovare la vera grandezza di ciascun triangolo, e la seconda nel disegnarli su di un foglio di carta l'uno appresso l'altro, secondo il loro conveniente ordine di successione. Or non potendosi la dimensione infinitamente piccola di ogni elemento triangolare, la quale è la base del triangolo, determinare nella pratica, conviene perciò stabilirla della più piccola lunghezza possibile; e siccome tutte le basi dei triangoli elementari formano la curva che è il contorno della base del Cono; così per operazione preparatoria bisogna dividere la detta curva in parti talmente piccole, che ogn'una si possa stimare linea retta, e per facilitazione si faranno tutte eguali tra loro, nulla importando se l'ultima risulta minore, ed in seguito dai punti di divisione tirare al vertice le rette.

Si noti, che supporremo essere circolare la base del Cono, e considereremo il Cono obbliquo, non già Retto, perchè sapendo noi dover essere lo sviluppo della superficie curva di questo secondo cono eguale ad un Settore circolare, del quale il raggio è eguale al lato del Cono, e l'arco corrispondente quivalente alla circonferenza della base, l'operazione è facilissima, quindi non necessaria a spiegarsi. Premesso quanto si è detto.

Sia *XY* il foglio del disegno; *AB* la comune sezione; *EI* la curva della base del Cono esistente nel piano orizzontale; *C*, D le projezioni del vertice, *EF*, *FG*, *GH* ec. le parti della curva le quali si possono stimare linee rette per la loro piccolezza; ed *ECF*, *FCG*, *GCH* ec. le projezioni orizzontali dei triangoli, li quali compongono la superficie Conica. Fig. 44

Per poter sviluppare la superficie, bisogna fare in essa un taglio, il quale potendo eseguirsi in qualunque direzione si vuole; torna più conto, in grazia della facilitazione, farlo secondo uno dei lati del Cono, come quello espresso dalla retta *EC*.

Per trovare la vera grandezza del triangolo dinotato da *ECF*, conviene determinare le lunghezze effettive dei suoi lati, escluso *EF*, perchè trovandosi nel piano orizontale, è di vera lunghezza. Or i due lati, corrispondenti ad *EC*, *FC*, essendo ipotenuse di due triangoli rettangoli, di ogn' uno dei quali il cateto verticale è l' altezza del vertice sul piano orizontale, e l' altro è la projezione orizontale del corrispondente lato, perciò non si ha da fare altro che costruire, detti due triangoli. Quantunque l' operazione si può fare in qualunque sito, conviene meglio considerare, che *DK* sia il comune cateto verticale. Perciò tagliate $KL=CE$, $KN=CF$, le due rette *DL*, *DN* saranno i veri lati appartenenti a *CE*, *CF*. Per costruire il triangolo, si tiri una retta qualunque *OP*, e fattala eguale a *DL*, se centro *P* ed intervallo un raggio eguale ad *EF* si descrive un arco di cerchio, e centro *O* intervallo un altro raggio eguale a *DN* si descrive un altro arco di cerchio, che col primo s' incontra in *Q*, condotte le rette *PQ*, *OQ* sarà il triangolo *OPQ* il vero corrispondente ad *ECF*. Collo stesso metodo determinando gl' altri lati spettanti a *CG*, *CH* ec., e costruendo sul lato *OQ* il triangolo *OQR* appartenente ad *FCG*; sopra di *OR* l' altro *ORS* spettante a *GCH*, e così di mano in mano finchè si giunga all' ultimo *OMZ*, il quale ha il lato $OM=OP$; se per tutt' i punti *P*, *Q*, *R*, *S*,

T, *V*, *Z*, M si fa passare una curva; la figura *PVMO* dinoterà lo sviluppo della superficie curva del cono. Se nella superficie conica fusse tracciata una curva, espressa in projezione orizontale da *abcd*, per disegnarla nello sviluppo, bisogna in questo, esprimere gl' incontri di essa curva con i rispettivi lati, *EC*, *FC* ec. Or la *EC* incontrando la curva nei punti *a*, *c* per determinare le vere lunghezze di *Ca*, *Cc*, si taglino *Ke*=*Ca*; *Kf*=*Cc*, e dai punti *e*, *f* innalzate le perpendicolari, che incontrano la corrispondente *DL* in *g*, *h*; saranno *Dg*, *Dh* le rette vere spettanti alle *Ca*, *Cc*. Se ora nella conveniente retta *OP* dello sviluppo si tagliano *Oi*=*Dg*; *Ol*=*Dh*, e lo stesso facendo per gl' altri lati del cono appartenenti alla proposta curva; segue, che per i punti ritrovati nello sviluppo fatte passare le due curve *iml*, *npo* (perchè la *CE* divide in due parti la curva *abcd*) si sarà ritrovato cio, che si cercava.

PROBL. XXXIII.

143. *Trovare lo sviluppo di una superficie cilindrica.*

Non tratteremo il cilindro retto, a basi paralelle, perchè lo sviluppo essendo eguale ad un rettangolo, del quale l' altezza è eguale al lato, e la base alla curva rettificata della base del cilindro, l' operazione è facilissima.

Per rendere più semplice la costruzinue supporremo, che il cilindro a basi paralelle sia paralello al piano di projezione verticale.

Dinoti *XY* il foglio del disegno; *AB* la Fig. 45 comune sezione; *CDE* la curva della base ci-

lindrica, esistente nel piano orizontale; *CF*, *GH* le projezioni del lato generatore, colla circostanza che *CF* è paralella ad *AB*.

Premesso quanto si è detto pel cono, siano *CI*, *IK* ec. le parti eguali della curva *CDE*, ogn' una delle quali si può stimare linea retta, per i punti di divisione *I*, *K*, *ec*: tirate le rette *IL*, *KM* ec. paralelle ed eguali al lato *CF*, si sarà divisa la superficie cilindrica in molti paralellogrammi Isoperimetri, ma non equiangoli tra loro; per cui, affine di trovare lo sviluppo, conviene determinare la configurazione di ciascuno di essi, e situarli sul piano del disegno l'uno immediatamente all' altro, con quell' ordine che richiede la natura del cilindro.

Supponendosi eseguito il taglio nel lato *CF*; si tiri nel primo paralellogrammo *CILF* la diagonale *FI*, essendo la sua vera retta Ipotenusa di un triangolo rettangolo, del quale il cateto verticale è *HN*, l' altro orizontale è *FI*; tagliata perciò *NO*=*FI*, sarà *OH* la vera diagonale. Or i tre lati veri: appartenenti al triangolo *FCI*, essendo *GH*, *OH*, e *CI*, si costruisca il triangolo, e sia *acb*, del quale *ac*=*GH*, *cb*=*OH* ed *ab*=*CI*; indi dal punto *b* condotta la *bd* eguale, e paralella ad *ac*, si sarà costruito il primo vero paralellogrammo. Il secondo dovendo formarsi sopra *db*, tirata nella projezione orizontale del secondo paralellogrammo *IKML* la diagonale *KL*, e fatta una simile costruzione, si descriverà il secondo vero paralellogrammo *befd*; eseguendo lo stesso per tutti gl' altri, se per i punti *a*, *b*, *e*, *g*, si fa passare una curva, ed un' altra per gl' altri *c*, *d*, *f*, *h*, la figura *aeghfc*

rappresenterà lo sviluppo della superficie cilindrica.

Si noti, che le curve *aeg*, *cfh* risultano eguali, e paralelle, perchè le basi del cilindro sono paralelle.

Se nella superficie cilindrica si trovasse tracciata una curva, si trasporterà nello sviluppo collo stesso metodo spiegato nel cono.



INDICE DELLE MATERIE.

CAPO. I.

Delle diverse specie di linee, e superficie.

CAPO. II.

Metodo di projettare.

PROJEZIONE DEL PUNTO.

PROJEZIONI DELLE SUPERFICIE.

PROJEZIONE DALLE SUPERFICIE PIANE.

I. IPOTESI.

2. IPOTESI.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE CONICA.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE CILINDRICA.

PROJEZIONE DELLA SUPERFICIE SFERICA.

CAPO. III.

Soluzioni di alcuni problemi.

CAPO V.

Delle superficie tra loro seganti.

PARTE I.

Dell' incontro di un piano con una superficie curva.

PARTE II.

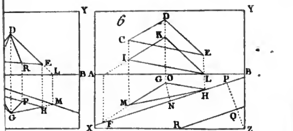
Dell' incontro di due superficie curve.

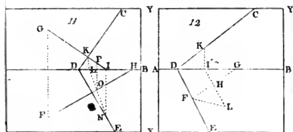
ERRORI ESSENZIALI A CORREGERSI.

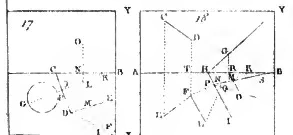
		ERRORI	CORREZIONI
p. 7	l. 27	nel muoversi un angolo	nel muoversi abbia un angolo
20	32	51	50
32	28	col quinto	col sesto
35	36	e nel piano orizontale	e nel piano verticale
41	9	minore	maggiore
45	11	maggiore	minore
124	21	*NMK*	*HMK*

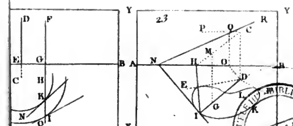
Nota. Si deve scrivere al paragrafo 106 la fig. 17.



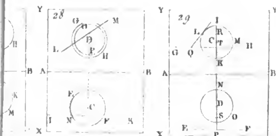

6
Y
D
C
K
I
E
R
L
B
A
G
O
P
M
H
N
X
F
R
Q
Z

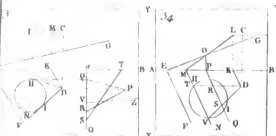

11
12
G
C
Y
K
P
D
I
H
B
A
O
F
N
E
X
L

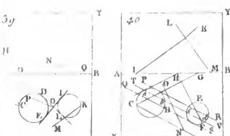

17
18
Y
O
C
N
K
B
A
L
M
E
D
F
X
T
H
R
P
Q
I

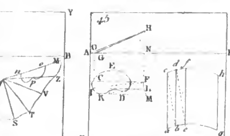

23
Y
D
F
E
G
B
A
C
H
K
N
O
I
P
Q
R
M
L
X




28
29
Y
X
A
B


34
Y
X
A
B


39
40
Y
X
A
B


45
Y
X
A
B







